ФИЗИКА

Г. Я. Мякишев, А. З. Синяков

МЕХАНИКА

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

10 класс



ДРОФА

ФИЗИКА

Г. Я. Мякишев, А. З. Синяков

МЕХАНИКА

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

10 класс

Учебник

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

8-е издание, стереотипное

Москва



2019



ВВЕДЕНИЕ[1]

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ НАУЧНОГО ВЗГЛЯДА НА МИР

§ 1. НЕОБХОДИМОСТЬ ПОЗНАНИЯ ПРИРОДЫ

Простые истины

Все мы в раннем детстве за два-три года усваиваем солидный «курс физики» — привыкаем к простым вещам и явлениям вокруг нас. Запоминается этот «курс» гораздо прочнее, чем всё то, что мы узнаем впоследствии (правда, повторение курса идёт непрерывно). Так мы узнаём, что камень всегда падает вниз на землю, что есть твёрдые предметы, о которые можно ушибиться, что огонь может обжечь и т. д.

Однако, как ни важны подобные знания, накапливаемые ребёнком, а впоследствии и взрослым человеком, они ещё не образуют науку. Подобный опыт приобретают и многие животные вскоре после рождения, хотя их поведение определяется врождёнными инстинктами в гораздо большей степени, чем у человека. Это частные правила, касающиеся течения отдельных явлений. Они говорят нам о том, что произойдёт в обычных условиях, но не отвечают на вопрос, почему те или иные события вообще происходят и не могут ли эти события не наступить совсем. Они также не позволяют предсказать, что произойдёт в новых, изменившихся условиях.

[1] Это введение при первом чтении может показаться сложным. Полезно возвращаться к нему по мере прохождения курса.

Зарождение науки

Потребность в понимании окружающего мира, в объяснении относительной устойчивости протекающих в нём событий очень велика. Это необходимо для уверенности в завтрашнем дне, для возможности предвидения того, что произойдёт. Людям необходимо понять устройство окружающего мира, чтобы выжить, чтобы использовать силы природы для облегчения труда, улучшения условий жизни.

В результате длительной борьбы за существование у человека появилась внутренняя потребность в познании природы. В первую очередь выживали те, кто лучше понимал окружающий мир и стремился расширить свои познания. В конечном счёте человеческий мозг оказался более могучим орудием в борьбе за существование, чем клыки, бивни и когти. Благодаря знаниям человек выжил и подчинил себе Землю.

Стремление увидеть в разрозненных событиях нечто общее, понять причины как обычных, так и редко встречающихся явлений привело к зарождению науки.

Наука и человечество

Может показаться, что в наше время нет необходимости в приобретении всё более новых знаний для того, чтобы выжить. Но это не так. Энергетические ресурсы Земли (нефть, газ, каменный уголь и др.), рудные месторождения быстро истощаются. И без открытия новых источников энергии, новых материалов, заменяющих привычные металлы, человечество не в состоянии существовать длительное время.

Потребность в глубоких знаниях — один из сильнейших импульсов, побуждающих человека к действию. Не только



прикладное значение науки, но и радость познания, красота открывающихся нам законов природы привлекли и продолжают привлекать людей.

§ 2. НАУКА ДЛЯ ВСЕХ

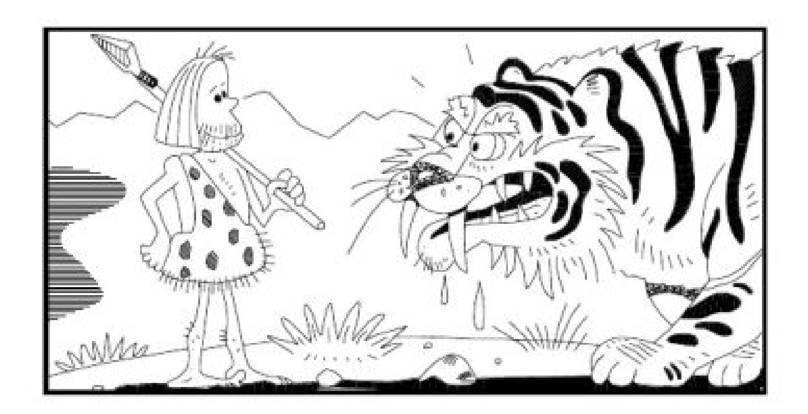
Эстафета передачи знаний

Знания приобретаются человеком на протяжении всей жизни. Но приобретённые новые качества, в том числе и знания, не передаются по наследству. Новые свойства, как физические, так и относящиеся к областям психики, не наследуются ни человеком, ни животным. Вследствие этого приобретённый животным опыт почти полностью теряется с его смертью. Передача опыта от родителей детёнышам играет у животных очень малую роль по сравнению с врождённым опытом поведения.

С тех пор как организмы с развитым мозгом получили возможность передавать своим потомкам большой объём информации посредством речи, эволюция преодолела барьер на пути наследственной передачи приобретённых свойств. Речь и возникла из-за потребности в быстрой и точной передаче жизненно важной информации.

Наука представляет собой одно из важнейших направлений развития человеческого общества, ставшее возможным в результате накопления идей и передачи опыта. Без передачи накопленных знаний наука немыслима. За время одной человеческой жизни науку создать нельзя.

Много веков длился процесс познания окружающего мира. Добытые сведения передавались из поколения в поколение и вот теперь передаются вам. Огромный труд был



затрачен учёными, и немалый труд предстоит затратить каждому молодому человеку для того, чтобы усвоить основы современной науки. В наше время без этих знаний не обойтись. Они нужны не только учёному и инженеру, но и рабочему на производстве, трактористу в поле. Ежедневно люди на работе и дома имеют дело со сложными механизмами. Чтобы понять, как они работают, нужно знать законы природы.

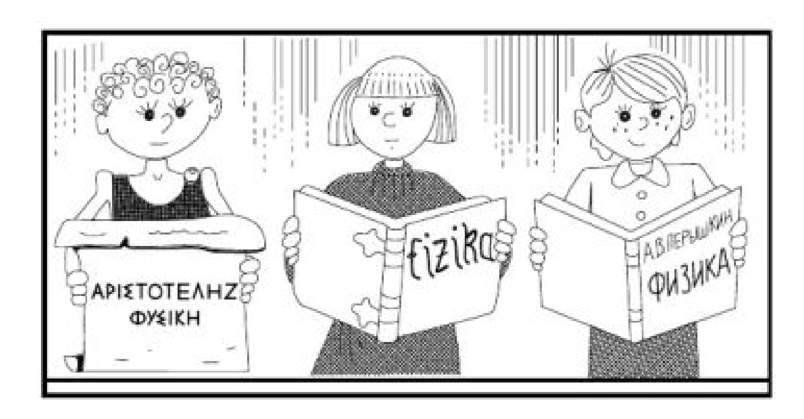
Обучение необходимо не только для развития общества, но и для поддержания его существования.

Преобразование мира

Именно развитие науки о природе дало в руки человека современную технику, и это привело к преобразованию окружающего нас мира. Основную роль сыграла здесь физика — наука, изучающая самые общие законы природы.

Физика служит фундаментом техники. Строительная техника, гидротехника, теплотехника, электротехника и энергетика, радиотехника, светотехника и другие выросли на основе физики. Благодаря сознательному использованию законов физики техника из области случайных находок вышла на широкую дорогу целенаправленного развития.

Познавая спрятанные под покровом бесконечно многообразного мира явлений законы природы, человек научился создавать то, чего никогда не было в природе. Было изобретено радио, построены громадные электрические машины, освобождена внутриатомная энергия. Человек вышел в космическое пространство.



Наука и производство

Наука и практическая деятельность человека чрезвычайно тесно связаны, переплетены друг с другом.

Зарождение науки, как уже говорилось, было обусловлено жизненно важными потребностями человечества. На протяжении всей истории науки запросы практики, техники и технологии являлись важнейшими стимулами её развития.

Развитие науки, с одной стороны, привело к преобразованию мира, а с другой — именно практическая деятельность человека в самом широком смысле является главным критерием истинности добываемых знаний, их объективности.

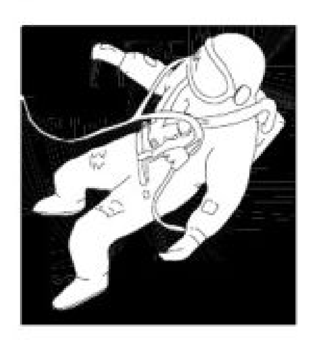
Физика и другие науки

Физика — это наука, занимающаяся изучением самых общих свойств окружающего нас материального мира.

Вследствие этой общности физики нет и не может быть явлений природы, не имеющих физических сторон. Поэтому понятиями физики и её законами пользуются в любом разделе естествознания, даже если при этом ограничиваются простым описанием предметов и явлений. Ведь при таком описании нельзя обойтись без физических представлений о размерах, длительности, массе, цвете и т. д.

В настоящее время физика глубокими корнями вросла в астрономию, геологию, химию, биологию и другие естественные науки. Она многое объясняет в этих науках, предоставляет им современные методы исследования: радиотелескопы, электронные микроскопы, лазеры, рентгеновские установки и т. д.

Широта и общность содержания приводят физику по наиболее принципиальным положениям в непосредственное соприкосновение с философией. Изучение наиболее важных сторон мира позволяет исследовать вопросы познания природы в отчётливой и общей форме, на которую не влияет сложность обыденных предметов и явлений. На протяжении всего курса вы будете знакомиться с физическими законами и явлениями. Перед вами постепенно предстанет общая картина единства природы.



Велико значение физики как одного из главных факторов, определяющих культурный уровень человека. Этот уровень, образно говоря, можно измерить числом фактов, которые че-

ловек способен видеть в кубическом метре Вселенной. С наибольшим числом фактов, относящихся к природе мира, в котором мы живём, знакомит нас именно физика.

§ 3. ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОГО НАУЧНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

От мифов к простым фактам

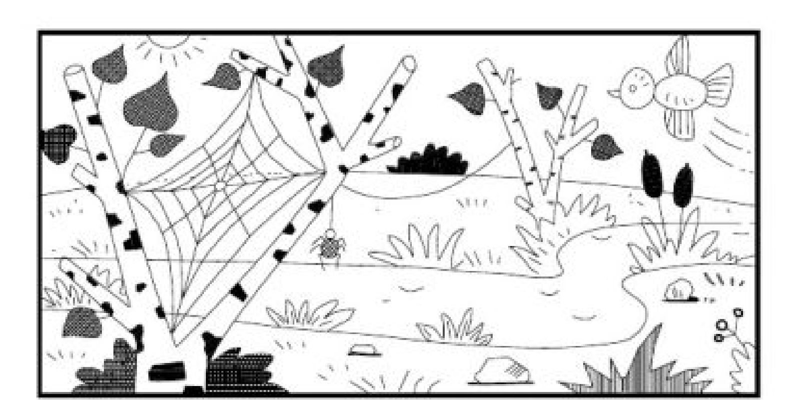
Каким же образом удаётся разглядеть черты единой картины мира в хаосе разнообразных событий? Как подойти к пониманию того общего, что есть между деревом и камнем, водой и паутиной, протянувшейся над ручьём, полётом птицы и движением планет?

Потребность в познании мира вначале привела к попыткам объяснить весь мир в целом, получить ответы на такие всеобъемлющие вопросы: откуда взялась Вселенная? В чём сущность жизни? Какие принципы управляют всеми событиями в мире?

Дать сразу обоснованные ответы на эти вопросы оказалось невозможным. Люди начали придумывать разнообразные мифы о возникновении мира, появилась религия.

Лишь примерно 500 лет назад человечество вступило на путь научного познания природы, который оказался поразительно плодотворным: люди приступили к экспериментированию с природой. Это было началом науки в той форме, как мы её знаем сегодня.

Одним из первых плодотворность нового пути осознал великий Леонардо да Винчи (1452—1519). Он писал: «Истол-



кователь ухищрений природы — опыт; он никого не обманывает; лишь наше суждение само себя иногда обманывает.

Нужно руководствоваться показаниями опыта и разнообразить условия до тех пор, пока мы не извлечём из опыта общих законов, ибо лишь опыт открывает нам общие законы.

Общие законы препятствуют нам вводить в заблуждение самих себя и других, ожидая результатов, получить которые невозможно.

Те, кто, изучая науки, обращается не к природе, а к авторам, не могут считаться сынами природы: я бы сказал, что они только её внуки. Лишь она одна — подлинная руководительница настоящих гениев; между тем, как это ни глупо, смеются над человеком, предпочитающим учиться у самой природы, а не у авторов, которые не больше как её ученики».

Сказано превосходно. И всё сказанное не утратило смысла до наших дней. Однако Леонардо не опубликовал эти мысли. Стимулом естествознания XVII в. стал призыв к экспериментальному изучению природы со стороны английского философа Фрэнсиса Бэкона (1561—1626). Ф. Бэкон понял важное обстоятельство: **законы природы могут дать неизмеримо больше, чем заключено в том опытном материале, на основе которого они получены. Именно благодаря этому возможна наука**.

Наука в современном понимании, по словам выдающегося физика В. Вейскопфа, возникла тогда, когда вместо попыток получить немедленно ответы на глобальные вопросы люди начали интересоваться простыми, на первый взгляд незначительными фактами. Например, падением камня, нагреванием воды, когда в неё бросают кусок раскалённого железа, и т. д. Но эти факты описывались очень строго, точно,



количественно. Любой человек при желании мог убедиться в их справедливости, проверить их.

Вместо того чтобы задавать общие вопросы и получать частные ответы, учёные начали задавать частные вопросы и получать общие ответы. Этот процесс продолжал развиваться: вопросы, на которые мог быть получен ответ, становились всё более общими. «Самый непостижимый факт, — как сказал однажды А. Эйнштейн, — заключается в том, что природа познаваема». В процессе познания законов природы отчётливо проявилась и продолжает проявляться справедливость мысли Бэкона о возможности найти общие законы, отправляясь от частных фактов, установленных точными экспериментами.

Сущность научного метода

Учёные давно перестали верить в то, что можно постичь истину, сидя за письменным столом и размышляя о том, как должна быть устроена Вселенная. Около 350 лет назад были окончательно выработаны основы наиболее подходящего физического метода исследования. Он состоит в следующем: **опираясь на опыт, отыскивают количественно (математически) формулируемые законы природы. Открытые законы проверяются практикой.**

Нельзя не удивляться, как, начав с исследования несложных фактов, наука быстро поднялась до современного уровня. За несколько сотен лет учёные пришли к открытию многих фундаментальных законов природы. Начиная с Галилея и Ньютона, учёные перестали считать, что наука должна сводить непривычные, непонятные явления к привычным и понятным с точки зрения здравого смысла. Задачей науки стал поиск математически выражаемых общих законов природы, которые охватывали бы громадную совокупность фактов.

Учёные стали требовать объяснения на основе этих законов привычных нам явлений, которые, казалось бы, не требуют объяснений. Например, почему книга не проваливается сквозь стол? Этим был брошен вызов «здравому смыслу». Вызов, который в таких современных теориях, как теория относительности и квантовая механика, привёл к прямому противоречию с обыденным здравым смыслом.

Суть нового направления поиска в науке, к сожалению, не вошла в плоть и кровь всех людей. В связи с этим очень часто и сейчас возникает множество недоразумений. Понять сущность современного научного мировоззрения и метода нелег-

ко. Переворот, который должен произойти в сознании человека, можно сравнить с переворотом в голове дикаря, который от лечения таким понятным средством, как изгнание злых духов, должен перейти к «таинственным» мерам: кипячению воды, прививкам, соблюдению гигиены и т. д. Изгонять нужно, как выяснилось, не привычных «здравому смыслу» человекоподобных существ, а микробы и вирусы, которые невозможно увидеть простым глазом.

Научное мировоззрение

Фундаментальные законы, устанавливаемые в физике, намного сложнее для восприятия, чем те простые факты, с которых начинается исследование любых явлений. Но они столь же достоверны, столь же объективны, как и наблюдаемые непосредственно простые явления. Эти законы в рамках своих границ применимости не нарушаются никогда, ни при каких условиях.

Всё большее число людей осознают, что природа следует определённым законам, которые исключают чудеса. Рост достижений науки в объяснении природы подрывает веру в сверхъестественное.

Плоды научного метода

Можно проследить, как открытие современного метода исследования природы очень быстро привело к резкому расширению возможностей человека.

В течение нескольких столетий население Земли, которое вплоть до эпохи Возрождения (XIV—XV вв.) количественно менялось очень медленно, внезапно возросло с 600 тыс. до 5 млрд. Большие пространства на поверхности Земли изменили свой облик. Материки прорезали шоссейные и железные дороги. На месте лесов выросли огромные города. Путешествие по воздуху с одного материка на другой стало намного быстрее и удобнее, чем путешествие из Петербурга в Москву, совершённое 200 лет назад. Человек высадился на Луну.

Экологические проблемы

Технологическое преобразование мира ставит проблему сохранения и поддержания жизни на нашей планете. Жизнь в любой форме постоянно вынуждена искать компромисс между присущей ей способностью к неограниченному росту и ограничениями, которые возникают при её взаимодей-

ствии с окружающей природной средой. Экологические проблемы являются общими для физиков, химиков, биологов, экономистов, инженеров, писателей и общественных деятелей.

К неблагоприятным экологическим последствиям приводит работа тепловых двигателей и атомная энергетика. В связи с этим на повестку дня ставятся серьёзнейшие вопросы. Могут ли атомные электростанции стать безопасными и насколько они необходимы? Решат ли энергетическую проблему термоядерные атомные станции и могут ли они быть созданы?

От падения камня до расширяющейся Вселенной и квантовой механики

Достижения современной науки трудно переоценить. Мы уже довольно достоверно знаем, что было с нашей Вселенной около 14 млрд лет назад. В это время произошёл Большой взрыв, и Вселенная стала расширяться. Это расширение продолжается до сих пор.

Первоначально вещество Вселенной было горячим, но расширение привело к постепенному уменьшению температуры. При температурах порядка нескольких миллиардов градусов начали образовываться атомные ядра из протонов и нейтронов. Когда температура снизилась до нескольких тысяч градусов, ядра получили возможность захватывать электроны: начали образовываться атомы. По мере дальнейшего уменьшения температуры стали образовываться простые молекулы, а затем жидкости и кристаллы. Наконец возникли гигантские цепеобразные молекулы, на основе которых зародилась жизнь.

Величайшим триумфом человеческого разума, рядом с которым трудно поставить достижения человечества как в области других наук, так и в сфере практической деятельности, было создание в 20-х гг. XX в. квантовой механики. На основе разрозненных, на первый взгляд противоречащих друг другу экспериментальных фактов, относящихся к макроскопическим явлениям, которые порождаются индивидуальными микроскопическими процессами, удалось создать теорию движения элементарных частиц — теорию процессов, непосредственно недоступных ни нашим органам чувств, ни воображению. Мы лишены возможности представить себе наглядно эти процессы, так как они отличаются от тех макроскопических явлений, которые человечество на-

блюдало на протяжении сотен тысяч лет и основные законы которых были сформулированы к концу XIX в.

Квантовая механика впервые объяснила устойчивость атома, закономерности образования молекул и позволила в общих чертах понять строение вещества. Она открыла «вероятностный» мир, в котором существуют микроскопические объекты. Эти объекты наделены удивительными противоречивыми свойствами: они могут занимать определённое положение, иметь определённую скорость, но не одновременно! При попытке ограничить движение микрочастицы малой областью пространства её скорость и энергия неизбежно возрастают.

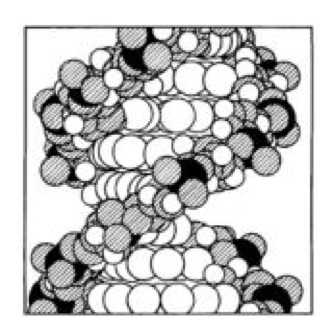
В 70-х гг. XX в. начала проясняться внутренняя структура элементарных частиц. Самое сокровенное в природе постепенно становится доступным человеческому разуму.

Познаваемость мира и самоограничение науки

Теперь мы убеждены, что найденный наукой метод познания мира единственно правильный. Только отказ от немедленного получения исчерпывающей, абсолютной истины, только бесконечный путь сквозь пестроту экспериментальных фактов сделали научные знания столь успешными и глубокими.

Учёные давно поняли, что познание — длительный и трудный процесс. Мир огромен и очень сложен. Многое мы не знаем совсем, о многом лишь начинаем догадываться. Не знаем с достоверностью структуру элементарных частиц и не в состоянии пока понять, чем обусловлены наблюдаемые свойства частиц и сколько типов истинно элементарных частиц существует в мире. Не знаем, что было со Вселенной до Большого взрыва и что будет с ней в дальнейшем.

Мы имеем пока лишь основу для описания эволюции Солнечной системы от беспорядочного облака до образования планет и зарождения жизни на Земле. Только недавно учёные приступили к изучению живых организмов на молекулярном уровне. Здесь удалось расшифровать информационный код наследственности, записанный на спиральных молекулах дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Но как на основе этого



кода создаётся живой организм, пока не ясно. Очень мало достоверного известно о природе сознания.

Наука, в отличие от мифов и религий, не утверждает, что она может немедленно дать ответы на все вопросы. В том числе на самые животрепещущие: о предназначении человека, о судьбе Вселенной и т. д. Но она даёт правильное понимание проблемы в целом, правильный подход к её возможному решению. Основанный на научном методе подход является единственно правильным, так как гарантирует достоверность полученных знаний. Однако это трудный и медленный путь достижения истины.

При изучении физики, так же как и других наук, нельзя сразу, за короткое время усвоить их суть и научиться эти знания применять для решения практических задач или развивать науку дальше. В той или иной мере необходимо знакомство не только с фундаментальными законами, но и с научным методом познания, главными фактами, лежащими в основе современного здания науки.

ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 4. ФИЗИКА — ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ НАУКА

Цель физики

Физика занимается изучением явлений, протекающих в природе. Её цель: **во-первых, отыскать наиболее общие законы природы; во-вторых, объяснить конкретные процессы действием этих общих (фундаментальных) законов.** Наиболее глубоко происходящие процессы можно объяснить на основе определённых представлений о строении различных веществ. **Выявление строения вещества также составляет задачу физики.**

Общих законов природы или фундаментальных физических теорий сравнительно немного, но они охватывают огромную совокупность явлений. К числу таких фундаментальных теорий относятся: классическая механика Ньютона, термодинамика, статистическая механика, электродинамика, квантовая механика и немногие другие.

Открытие общих законов подготавливается в процессе развития науки, накопления новых фактов и совершается людьми, способными глубже проникнуть в суть явлений, чем их современники. В основном же труд физика состоит в поиске новых фактов и в приложении общих принципов к объяснению конкретных явлений. Не следует, однако, думать, что объяснение конкретного процесса на базе известных фундаментальных законов — простая вещь. Например, объяснить явление сверхпроводимости удалось лишь спустя 50 лет после создания квантовой механики — теории, в рамках которой можно это сделать.

Экспериментальный характер физики

Задачи, стоящие перед физикой, определяют особенности физического метода исследования.

При изучении физики уже недостаточно карандаша и бумаги — привычных принадлежностей математика. Требуется большее пространство, чем пространство стола, и бо́льшая поверхность, чем площадь доски. Дело в том, что физика, в отличие от математики, — экспериментальная наука. Её законы основаны на фактах, установленных опытным путём. Причём факты остаются, а истолкование их часто меняется в ходе исторического развития науки.

Факты устанавливаются главным образом в результате планомерных наблюдений. Бывают, правда, и случайные открытия, как, например, открытие А. Беккерелем радиоактивного распада урана.

Физические величины и их измерение

Экспериментальный характер физики определяет весь строй этой науки.

Исследование явлений начинается с наблюдения. Но при этом нельзя ограничиваться общим качественным впечатлением от явления. Человек должен выделить и зафиксировать в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Это ведёт к образованию понятий, являющихся первым шагом на пути познания природы.

Следующий важный шаг в развитии научной мысли состоит в переходе к понятиям, допускающим количественные характеристики в форме числа. Необходимо найти количественные характеристики отдельных сторон явления в виде величин, доступных измерению. Дело это непростое: ведь

надо догадаться, какие именно понятия могут служить для количественной характеристики явления.

Для того чтобы описать происходящие события и вскрыть их сущность, учёные вводят целый ряд строго определённых количественных понятий — физических величин: скорость, сила, давление, температура, электрический заряд и т. д. Каждой величине надо дать точное определение, в котором указать, как эту величину можно измерить, как провести необходимый для этого измерения опыт, чтобы получить её количественное значение. В физике чисто словесного определения величины недостаточно. При определении математических величин мы не встречаем чего-либо подобного.

Можно смело утверждать, что какая-либо область физического знания вообще становится наукой лишь с того момента, когда мы вводим в неё измерения. Только благодаря возможности получать количественные значения физических величин мы можем точно предсказать наступление определённых событий. Например, если бы мы не умели измерять температуру, то никогда не смогли бы дать точный ответ на вопрос: когда закипит вода? Умея же измерять температуру, такой ответ можно дать без труда: вода закипит при температуре 100 °С. Следя за изменением температуры воды, мы можем предсказать момент закипания воды.

Обычно при определении физических величин просто уточняют и придают количественную форму тому, что непосредственно воспринимается нашими органами чувств. Так вводят понятия силы, температуры и т. д. Но есть, конечно, величины, которые не воспринимаются нашими органами чувств, например электрический заряд. Но они могут быть выражены через другие величины, на которые органы чувств человека реагируют. Так, значение электрического заряда определяется по силам взаимодействия между заряженными телами.

Связи между физическими величинами

Чтобы из наблюдений над явлениями сделать общие выводы, найти причины явлений, надо установить количественные зависимости между различными величинами. Если такая зависимость найдена, то мы говорим, что открыт физический закон. Установление зависимостей между физическими величинами избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт. С помощью несложных вычислений можно найти ответ на любой интересующий нас вопрос в данной области явлений.

Для установления зависимостей между физическими величинами необходимо от непосредственного наблюдения перейти к физическому эксперименту, при этом следует специально фиксировать условия, в которых протекает процесс.

Если меняются все условия сразу, то трудно уловить какие-либо определённые закономерности. Поэтому, проводя физический эксперимент, стремятся проследить зависимость одной величины от характера изменения каждого из условий по отдельности. Например, давление газа зависит от его массы, объёма и температуры. Чтобы исследовать эту зависимость, надо сначала изучить, как влияет на давление изменение объёма, когда температура и масса остаются неизменными. Затем проследить, как давление зависит от температуры при постоянных объёме и массе и т. д.

Теория

Изучая экспериментально количественные связи между отдельными величинами, можно выявить некоторые частные закономерности. На их основе создают теорию явлений, которая объединяет в одно целое отдельные законы. Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы относятся к отдельным явлениям. Она призвана объяснить частные закономерности с общей точки зрения.

Основные физические теории не могут быть построены чисто логически. Фундаментальные связи могут быть установлены только на основе эксперимента. Однако теория — это не простое объединение нескольких опытных закономерностей. Она является результатом творческой работы, размышления и воображения. Данные опытов неизбежно разрозненны. Многие важные детали могут быть упущены. Создавая теорию, учёный должен воссоздать цельную картину явлений.

Значение законов природы состоит в том, что они могут дать гораздо больше информации, чем опытные факты, с помощью которых эти законы получены. Если бы это было не так, то вместо современной науки мы имели бы разрозненные сведения о происходящих в природе процессах, но ничего не могли бы предсказать.

Теория позволяет не только объяснять уже наблюдавшиеся явления, но и предсказывать новые. Так, Д. И. Менделеев на основе открытого им периодического закона предсказал существование нескольких химических элементов, которые

в то время не были известны. Английский физик Дж. Максвелл предсказал существование электромагнитных волн.

С развитием и углублением теории появляется возможность дать истолкование многих понятий, введённых в начале исследования. Например, только с появлением молекулярно-кинетической теории был вскрыт физический смысл температуры как средней меры интенсивности хаотического движения молекул.

В заключение подчеркнём, что справедливость физической теории доказывается тем, что вся совокупность следствий из неё согласуется с опытными фактами. Логическая непротиворечивость теории необходима, но не является достаточной для справедливости теории, как в математике. Можно построить логически безупречную теорию, которая не будет иметь никакого смысла, если не будет соответствовать фактам.

§ 5. ПРИБЛИЖЁННЫЙ ХАРАКТЕР ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Необходимость упрощения реальных явлений

Не следует думать, что только фундаментальные теории базируются на фактах, а конкретные явления можно объяснить на основе этих теорий без обращения к эксперименту. Сейчас мы в этом убедимся.

Любое явление, любой процесс, свойства любого конкретного тела бесконечно сложны, поэтому, приступая к исследованию физического явления, мы должны выделить то главное, от чего это явление зависит существенным образом, и отбросить второстепенные обстоятельства, которые в рассматриваемом явлении не играют существенной роли. Без такого упрощения исследование физических явлений немыслимо. Самые простые явления приводили бы к сложным, неразрешимым теоретически задачам.

Например, падение камня принадлежит к числу простых явлений. Главный фактор здесь — притяжение к Земле. Но имеется ещё целый ряд обстоятельств, влияющих на падение камня: сопротивление воздуха, вращение Земли, её форма (Земля сплюснута у полюсов), притяжение к окружающим телам, к планетам и т. д. Все эти влияния действительно есть, но почти всеми ими можно (и даже нужно) пренебречь. Иначе задачу о падении камня вообще невозможно было бы решить.

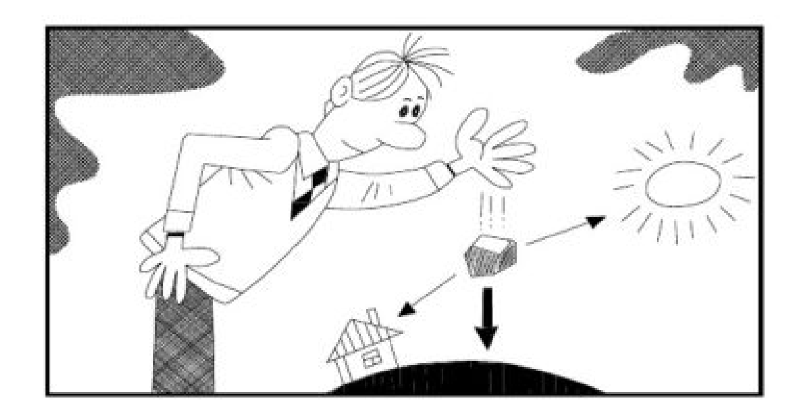
В данном случае всё просто, и основной фактор можно выделить сразу. Но так обстоит дело далеко не всегда. Попробуйте ответить на вопрос: что в основном определяет подъёмную силу крыла птицы или самолёта?

Упрощённая модель явления

Подчеркнём одно коренное отличие физического метода исследования от математического.

В математике при образовании основных понятий раз и навсегда отвлекаются от качественного своеобразия объектов, выделяя существенные для математики количественные отношения, и далее имеют дело с логическими следствиями первоначальных положений. Например, в геометрии раз и навсегда вводится понятие точки, и затем с ним оперируют, не заботясь о том, существуют ли точки в природе.

В физике при анализе каждого нового явления нужно уметь каждый раз выделять существенное в нём и, следовательно, определённая идеализация, упрощение реальных обстоятельств всегда должны иметь место. Например, в физике тоже вводится понятие материальной точки как тела, обладающего массой, но не имеющего размеров. Однако в физике это понятие всегда рассматривается как некоторое приближение к действительности, которое справедливо только при определённых условиях. Каждый раз нужно выяснять, выполняются эти условия или нет. Так, при рассмотрении притяжения планет к Солнцу размеры планет и Солнца намного меньше расстояний между ними. Поэтому и планеты, и Солнце можно считать материальными точками. Такое упрощение позволяет сравнительно легко установить характер движения планет.



Но если расстояния между взаимодействующими телами не очень велики по сравнению с их размерами, то считать их материальными точками уже нельзя. Например, движение искусственных спутников и даже Луны заметно зависит от размеров и формы Земли.

Итак, при рассмотрении явлений нужно прежде всего определить, какой упрощённой моделью можно заменить происходящее в действительности сложное явление.

Объяснение конкретных явлений невозможно без опоры на эксперимент

Теперь вернёмся к роли эксперимента в объяснении конкретных физических явлений.

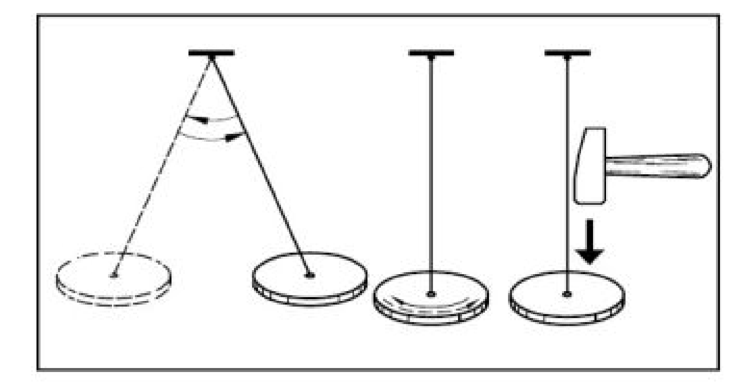
Мы не можем чисто теоретически установить, пригодна ли данная упрощённая модель для описания конкретного явления. Чтобы теоретически оценить влияние различных факторов на явление, нужно сначала все их учесть, а потом сравнить их роль. Но это немыслимо из-за громадной сложности и многообразия влияний, определяющих реальный процесс.

Только опыт даёт нам уверенность в правильности той или иной модели явления. Правда, далеко не всегда нужны специальные опыты. Часто можно опираться на сведения, взятые из уже известных экспериментов, не имеющих непосредственного отношения к рассматриваемой задаче.

От чего зависит выбор упрощённой модели явления?

Для понимания сущности физического метода исследования важно ещё одно обстоятельство. Выбор той или иной упрощённой модели определяется не только свойствами самого исследуемого объекта, но зависит также от характера процессов, которые мы намерены изучать. Приведём два примера.

П р и м е р 1. Пусть исследуемым объектом будет металлический диск, подвешенный на упругой проволоке, длина которой намного больше размеров диска. Если нас интересует вопрос о периоде линейных колебаний диска (период — время, в течение которого диск возвращается в исходное положение после того, как проволока отклонена в вертикальной плоскости на некоторый угол), то можно не учитывать распределение массы в диске и считать его точкой. Период колебаний определяется только длиной проволоки и ускорением, сообщаемым Землёй всем телам у её поверхности. Распреде-



ление масс и упругие свойства диска тоже влияют на период, но это влияние мало и им можно пренебречь.

Изучая крутильные колебания диска (колебания вокруг проволоки как оси), мы уже не имеем права пренебрегать распределением масс, так как именно оно определяет значение периода. Но здесь можно не учитывать малые деформации диска (а они обязательно есть) и рассматривать диск как абсолютно твёрдое тело.

Теперь ударим по диску молоточком. Он зазвенит, так как в нём возникнут упругие колебания. При изучении этих колебаний мы уже не можем считать диск абсолютно твёрдым.

Итак, от характера изучаемого явления зависит, какие свойства диска необходимо учитывать, а какими можно пренебречь.

Пример 2. Если нас интересуют только механические и тепловые свойства разреженного газа, то приблизительно объяснить эти свойства можно, рассматривая молекулы газа как маленькие упругие шарики, движущиеся хаотически, сталкивающиеся друг с другом и со стенками сосуда. Давление на стенки сосуда как раз и обусловлено этими соударениями. Мы можем даже экспериментально осуществить эту модель газа. Горошины могут моделировать молекулы, а их хаотическое движение можно возбудить с помощью колеблющихся стенок сосуда. Но оптические свойства газа такая модель объяснить совершенно не в состоянии.

§ 6. ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ

Изучение физики в школе

Необходимость знания основ физики всеми, а также особенности физики как науки заставляют строить обучение

физике не так, как это делается при изучении математики и других наук.

Уже несколько лет вы изучали физику и многое, надо надеяться, поняли в строении окружающего мира. Вы познакомились со строением вещества, механикой, тепловыми и электромагнитными явлениями, строением атома. Можно было бы ожидать, что в старших классах вас познакомят с чем-то совершенно новым. Но это не так! Лишь волновая оптика, теория относительности и ядерная физика появятся впервые, а в основном вы будете изучать ту же механику, ту же молекулярную физику, электродинамику и т. д. Точно так же происходит обучение физике во всех странах мира. Те из вас, кто будет учиться дальше в вузах, опять начнут изучать физику с самого начала, с механики, уже по третьему разу.

Объяснить в нескольких фразах, почему так приходится делать, довольно трудно. Вы сами почувствуете это в дальнейшем. Причин здесь немало. Остановимся на главных.

Взаимосвязь процессов в природе

Физика изучает конкретные явления. Каждое явление связано бесчисленными, часто неочевидными нитями со всеми другими явлениями. Поэтому, объясняя какое-либо событие, мы не можем не затронуть окружающий мир. Этот мир един. В нём нет ни чисто механических, ни чисто тепловых или электромагнитных явлений. Чтобы приблизиться к пониманию мира, мы расчленяем единое целое и изучаем его части. Это необходимо, ибо нельзя надеяться объяснить сразу всё многообразие мира.

Вот два примера взаимосвязи процессов. Механическое движение почти всегда сопровождается тепловыми явлениями. Тела при движении в воздухе, даже очень разреженном, нагреваются и могут вообще сгореть, если скорость движения велика. Это происходит с метеоритами в атмосфере Земли и происходило бы с космическими кораблями, возвращающимися на Землю, если бы не принимались меры к их постепенному торможению.

Строение вещества, тепловые, оптические и многие другие процессы в телах обусловлены взаимодействиями между электрически заряженными частицами, из которых построены атомы. Поэтому, не зная законов электромагнитных взаимодействий, нельзя как следует понять ни строения вещества, ни перечисленных процессов.

Приходится вначале знакомиться с очень грубыми моделями реальных явлений, когда внутренние связи между процессами различной природы непосредственно не выступают. В результате получается очень упрощённая схема явления, которая нуждается в дальнейших уточнениях. Это и делается при повторном изучении физики в вузах.

Примерно таким же путём развивается и сама наука. Постепенно уточняются значение и роль различных процессов в природе, с тем чтобы в конце концов приблизиться к пониманию мира как единого целого.

Физика и математика

Важно ещё одно обстоятельство. Физика — наука экспериментальная, но в то же время и наука количественная. **Все основные законы физики формулируются на математическом языке.** И этот язык надо знать, а он не прост.

§ 7. ПОЗНАВАЕМОСТЬ МИРА

Цепочка вопросов и ответов

Благодаря открытиям учёных многих стран на протяжении нескольких веков мы узнали очень много о закономерностях окружающего нас мира. Настолько много, что полученную информацию уже не может охватить индивидуальный человеческий мозг. Но мы знаем далеко не всё, быть может, не знаем самого главного.

Попытки разобраться в самом простом и обыденном явлении быстро заведут нас весьма далеко. Настолько далеко, насколько в настоящее время продвинулась наука. Вот пример цепочки вопросов, которые можно задавать по любому поводу, и ответов.

Почему книга не проваливается сквозь стол? Потому что стол не даёт ей падать. А почему не даёт? Потому что стол немного прогибается под действием книги и при этом возникает сила упругости, которая и мешает книге падать, несмотря на притяжение к Земле. Почему возникает сила упругости? Потому что расстояния между атомами стола при его изгибе меняются и из-за этого возникает дополнительная сила, действующая между заряженными частицами соседних атомов. А почему электроны притягиваются к положительно заряженному ядру, но не падают на него? Почему существуют атомы? А потому, что есть такой закон природы (закон кван-

товой механики): чем меньше область пространства, в которой заключена частица, тем быстрее она должна двигаться. Это мешает электрону упасть на ядро, размеры которого примерно в десять тысяч раз меньше размеров атома. Но почему такой закон существует? Вот этого не знает уже никто на земном шаре. Опыт говорит, что такой закон есть, и это пока всё!

Познаваемость мира

В одном мы можем быть уверены: найденный человечеством путь познания природы является правильным.

На пути теоретических обобщений, опирающихся на показания самой природы, наука достигла поразительных результатов и, главное, создала уверенность в неограниченной познаваемости мира — мира движущейся, изменяющейся, бесконечно разнообразной материи.

МЕХАНИКА

§ 1. ЧТО ТАКОЕ МЕХАНИКА?

Выделим среди великого множества процессов, происходящих в природе, круг явлений, которые изучает механика.

Первое, что бросается в глаза при наблюдении окружающего нас мира, — это его изменчивость. Мир не является застывшим, статичным. Изменения в нём весьма разнообразны. Но если спросить вас, какие изменения вы замечаете чаще всего, то ответ, пожалуй, будет однозначным: **меняется положение предметов** (или тел, как говорят физики) **относительно земли и относительно друг друга с течением времени**. Бежит ли собака или мчится автомобиль — с ними происходит один и тот же процесс: их положение относительно земли меняется с течением времени. Они перемещаются. То же самое происходит с листьями деревьев в ветреную погоду, с падающими каплями дождя, с плывущими в небе облаками.

Конечно, не любые изменения состоят в перемещении тел. Так, например, при охлаждении вода замерзает, превращается в лёд. Но наиболее часто встречающиеся вокруг нас изменения — это изменения положения тел относительно друг друга.

Изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени называется механическим движением.

Определение механического движения выглядит просто, но простота эта обманчива. Прочтите определение ещё раз и подумайте, все ли слова вам ясны: «пространство», «время», «относительно других тел». Скорее всего, эти слова требуют пояснения.

Пространство и время

Пространство и время — наиболее общие понятия физики и... наименее ясные. Исчерпывающих сведений о пространстве и времени мы не имеем. Но и те результаты, которые по-

лучены сегодня, изложить в самом начале изучения физики невозможно.

На первых порах нам вполне достаточно уметь измерять расстояние между двумя точками пространства с помощью линейки и интервалы времени с помощью часов. Линейка и часы — важнейшие приспособления для измерений в механике, да и в быту. С расстояниями и интервалами времени приходится иметь дело при изучении всех школьных предметов (проверьте!).

«...Относительно других тел»

Если эта часть определения механического движения ускользнула от вашего внимания, то вы рискуете не понять самого главного. Вот пример. В купе вагона на столике лежит яблоко. Попросим двух наблюдателей (пассажира и провожающего) ответить во время отправления поезда на вопрос: движется ли яблоко?

Наблюдатели оценивают положение яблока каждый по отношению к себе. Пассажир видит, что яблоко от него на расстоянии 1 м и расстояние это сохраняется с течением времени. Провожающий на перроне видит, как с течением времени расстояние от него до яблока растёт.

Пассажир: «Яблоко не совершает механического движения, оно неподвижно».

Провожающий: «Яблоко движется».

Итак, одно и то же тело одновременно и движется, и не движется. Возможно ли такое? Согласно определению механического движения, именно так и есть.

Законы природы и юридические законы

Любые изменения в природе подчиняются определённым законам. Движение тел описывается законами механики. Различие законов природы и юридических законов состоит прежде всего в том, что законы природы не изобретаются людьми, а открываются в процессе исследования окружающего мира. Если юридические законы могут быть нарушены или отменены, то нарушить или отменить законы природы не может никто!

Механика — наука об общих законах движения тел. Механическим движением называется перемещение тел в пространстве относительно друг друга с течением времени.

§ 2. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НЬЮТОНА И ГРАНИЦЫ ЕЁ ПРИМЕНИМОСТИ

Как и все законы физики, законы механики не абсолютно точны.

Законы механики были сформулированы великим английским учёным Исааком Ньютоном. На могильной плите в Вестминстерском аббатстве в Лондоне высечены знаменательные слова:

Здесь покоится
Сэр Исаак Ньютон,
Который почти божественной силой своего ума
Впервые объяснил
С помощью своего математического метода
Движения и формы планет,
Пути комет, приливы и отливы океана.
Он первый исследовал разнообразие световых лучей
И проистекающие отсюда особенности цветов,
Которых до того времени никто даже не подозревал.
Прилежный, проницательный и верный истолкователь
Природы, древностей и священного писания,
Он прославил в своём учении всемогущего Творца.
Требуемую Евангелием простоту он доказал своей жизнью.
Пусть смертные радуются, что в их среде
Жило такое украшение человеческого рода.
Родился 25 декабря 1642 г.
Умер 20 марта 1727 г.



Исаак Ньютон (1643—1727 по нов. ст.) — гениальный английский физик и математик, один из величайших учёных в истории человечества. Ньютон сформулировал основные законы и понятия механики и открыл закон всемирного тяготения. Он разработал также теорию движения небесных тел и впервые объяснил происхождение приливов и отливов в океане. В оптике Ньютон открыл явление разложения белого света на цвета, объяснил происхождение цветов и др. Разработав метод математического исследования природы, Ньютон повлиял на всё последующее развитие физики.

На протяжении многих лет учёные были уверены, что единственными основными (фундаментальными) законами природы являются законы механики Ньютона. Всё богатство и многообразие мира считали результатом различий в движении первичных частиц, слагающих все тела Вселенной. Однако простая механическая картина мира оказалась несостоятельной. При исследовании электромагнитных явлений было доказано, что они не подчиняются законам Ньютона. Другой великий английский физик, Джеймс Клерк Максвелл, открыл новый тип фундаментальных законов. Это законы поведения электромагнитного поля, несводимые к законам Ньютона.

Было выяснено также, что законы Ньютона, как и любые другие законы природы, не являются абсолютно точными. Они хорошо описывают движение больших тел, если их скорость мала по сравнению со скоростью света в вакууме.

Механика, основанная на законах Ньютона, называется классической механикой.

Для микроскопических частиц справедливы, как правило, законы квантовой механики. При движениях со скоростями, близкими к скорости света, тела обнаруживают свойства, о существовании которых Ньютон не подозревал.

Окружающие нас тела достаточно велики и движутся сравнительно медленно. Поэтому их движение подчиняется законам Ньютона. Таким образом, область применения классической механики очень обширна. И в этой области человечество всегда будет пользоваться для описания движения тел законами Ньютона.

КИНЕМАТИКА

Глава 1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

§ 1.1. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА И ТОЧКИ

Приступим к изучению механического движения. В любом деле первый и главный вопрос: с чего начать? Не думайте, что ответ на этот вопрос при изучении движения оказался простым. Человечеству понадобилось около двух тысяч лет, чтобы встать на верный путь, который завершился открытием законов движения.

Попытки древних философов объяснить причины движения, в том числе и механического, были плодом чистой фантазии. Подобно тому, рассуждали они, как утомлённый путник ускоряет шаги по мере приближения к дому, падающий камень начинает двигаться всё быстрее и быстрее, приближаясь к матери-Земле. Движения живых организмов, например кошки, казались в те времена гораздо более простыми и понятными, чем падение камня. Были, правда, и гениальные озарения. Так, греческий философ Анаксагор говорил, что Луна, если бы не двигалась, упала бы на Землю, как падает камень из пращи.

Однако подлинное развитие науки о механическом движении в современном смысле слова началось с трудов великого итальянского физика Галилео Галилея. Галилей первым понял, что для открытия законов движения нужно сначала научиться описывать движение количественно (математически). Нельзя ограничиваться простым наблюдени-

ем за движущимися телами; нужно ставить опыты для того, чтобы выяснить, по каким именно правилам происходит движение.

Раздел механики, изучающий способы описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения, называют кинематикой.

Описать движение тела — это значит указать способ определения его положения в пространстве в любой момент времени. Уже на первый взгляд задача описания кажется очень сложной. В самом деле, взгляните на клубящиеся облака, колышущуюся ветку дерева, представьте себе, какое сложное движение совершают поршни автомобиля, мчащегося по шоссе. Как же приступить к описанию движения? Самое простое (а начинать всегда лучше с простого) — это научиться описывать движение точки. Под точкой можно понимать, например, маленькую отметку, нанесённую на движущийся предмет — футбольный мяч (рис. 1.1), колесо трактора и т. д. Если мы будем знать, как происходит движение каждой точки (каждого очень маленького участка) тела, то тем самым мы будем знать, как движется всё тело.

Но вначале не надо гнаться за особо точным описанием движения. Давайте примем за точку очень маленький предмет — маленький по сравнению с тем расстоянием, которое он проходит. Например, когда вы говорите, что пробежали на лыжах 10 км, то никто не станет уточнять, какая именно часть вашего тела преодолела расстояние именно в 10 км, хотя вы отнюдь не точка. В данном случае это не имеет сколько-нибудь существенного значения.

Это очень важный момент. Когда мы пытаемся описать события, происходящие в мире, то всегда приходится прибегать к разного рода упрощениям действительности. Иначе мы вообще не сдвинемся с места в решении поставленной задачи. Не имеет смысла претендовать на абсолютную точность описания. Во-первых, она практически не нужна, а во-вторых, всё равно она недостижима во всей полноте.

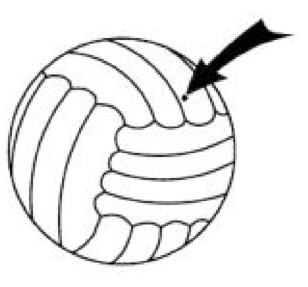


Рис. 1.1

Но и движение маленького тела может быть очень сложным и запутанным. Так, пчела за день совершает столь сложное движение, что за количественное его описание вряд ли кто-либо смог бы взяться. Самое

простое движение — это движение по прямой в одном направлении. Его совершает автомобиль на прямолинейном участке шоссе или поезд на прямом участке железнодорожного полотна. Вот с прямолинейного движения точки мы и начнём.

Изучение движения начинаем с его описания. Простейшее движение — это движение точки по прямой.

§ 1.2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. КООРДИНАТЫ. СИСТЕМА ОТСЧЁТА

Выясним, что нужно для описания движения точки.

Координаты

Механическое движение состоит в изменении положения тела в пространстве с течением времени. В случае прямолинейного движения точка (обозначим её буквой A) во все моменты времени остаётся на одной прямой. Для определённости будем считать, что прямая изображает шоссе, а точка A — автомобиль.

Описать движение автомобиля — это значит определить его положение на шоссе в любой момент времени[1].

Сделать это можно различными способами.

Предварительно необходим простой, но важный шаг. На прямой (шоссе) мы должны выбрать начало отсчёта расстояний. Указать положение автомобиля на шоссе — значит указать его расстояние от точки, принимаемой за начало отсчёта расстояний. Точку эту можно выбирать произвольно, но выбирать её надо обязательно. Например, за начало отсчёта расстояний можно принять один из километровых столбов.

Выберем точку начала отсчёта расстояний и обозначим её буквой O (рис. 1.2). Расстояние OA от начала от-

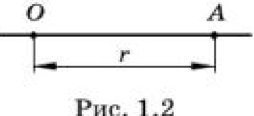


Рис. 1.2

[1] Если вам всё же не нравится, что автомобиль рассматривается как точка, то с тем же успехом можете считать точкой A метку, поставленную на кузове машины. Тогда нарисованная прямая — это линия, вдоль которой движется метка. В данном случае совершенно безразлично, на каком месте кузова поставить метку. Все метки будут перемещаться одинаково вдоль параллельных прямых.

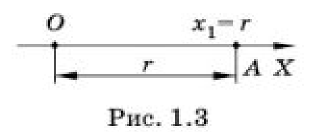


Рис. 1.3

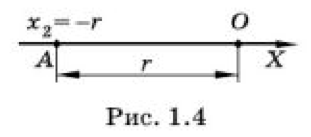


Рис. 1.4

счёта до движущейся точки обозначим буквой r. Но это расстояние ещё не определяет положения точки A на прямой однозначно. Допустим, что r = 550 м. Такое расстояние можно отсчитать как вправо от точки O, так и влево. Поэтому характеризовать положение точки A просто длиной отрезка OA нельзя. Нужно ещё знать, справа или слева от начала отсчёта расположена точка A. Вы уже догадались, что следует воспользоваться осью координат (это понятие вам хорошо известно из курса математики), т. е. выбрать на прямой положительное направление, отметив его стрелкой. Тогда положение тела можно охарактеризовать одной координатой — числом, принимающим как положительные, так и отрицательные значения.

Точки A (рис. 1.3 и 1.4), находящиеся на одинаковых расстояниях r от начала координат, имеют координаты $x_1 = r$ (см. рис. 1.3) и $x_2 = -r$ (см. рис. 1.4). Расстояние точки от начала координат равно модулю её координаты: $r = |x|$. Если за начало отсчёта принять километровый столб (рис. 1.5), то при выбранном положительном направлении оси X координата автомобиля будет положительной, а координата дерева — отрицательной.

Расстояние OA измеряется одним из обычных способов, например с помощью рулетки. Никаких особых трудностей при измерении расстояния на шоссе нет. Вот измерение огромных расстояний до планет Солнечной системы и осо-

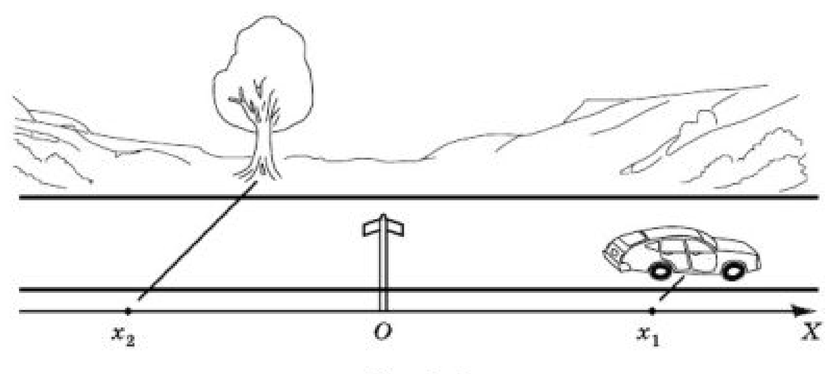


Рис. 1.5

бенно до звёзд — задача сложная. Решением её занимается астрономия. Трудно измерять и очень малые расстояния, такие как расстояния между атомами твёрдого тела.

Если бы точка A покоилась, то задача по определению её положения решалась просто: надо измерить координату точки A. Ведь координата покоящегося тела не меняется со временем. Другое дело, когда точка A движется. Теперь её координата x в разные моменты времени различна, т. е. зависит от времени. Найти эту зависимость — значит ответить на вопрос, каковы координаты точки в любые моменты времени. Или, наоборот, в какие моменты времени точка A будет иметь указанные координаты. Определение моментов времени сейчас не является сложной задачей, если не требуется очень высокая точность.

Правда, не очень просто фиксировать момент, когда тело оказывается в данном месте. Так, на спортивных соревнованиях (бег, горные лыжи, коньки) для определения времени финиша с точностью до сотых и даже тысячных долей секунды применяются сложные электронные устройства. Но мы будем считать, что в каждом случае можно одновременно фиксировать положение точки и показания часов с достаточной точностью.

Система отсчёта

Во всех случаях можно говорить лишь о движении одного тела относительно другого (например, о движении автомобиля относительно земли)[1].

Тело, относительно которого рассматривается движение, называется телом отсчёта.

С телом отсчёта обычно связывают систему координат. В случае прямолинейного движения достаточно одной координатной оси. С помощью системы координат определяют положение тела. Кроме того, необходимы часы, так как движение происходит во времени.

Тело отсчёта, связанная с ним система координат (или координатная ось) и часы образуют систему отсчёта.

Для описания прямолинейного движения нужно выбрать систему отсчёта: тело отсчёта, координатную ось и часы.

---

[1] Подробно вопросы, связанные с относительностью движения, мы рассмотрим в конце главы.

? 1. Можно ли автомобиль считать точкой при его движении по выпуклому мосту?

2.° С какой целью необходимо знать явный вид зависимости координаты тела от времени?

§ 1.3. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ТРАЕКТОРИЯ

Есть различные способы описания движения. Познакомимся с ними.

Описание с помощью таблиц

Один из простых способов количественного описания прямолинейного движения точки рассмотрим на следующем примере. Будем определять положения автомобиля на шоссе через равные интервалы времени, например через каждую минуту. За начальный момент времени можно принять показания часов, когда мы определяем положение тела в первый раз. Выбор начала отсчёта времени произволен. Если отсчёт времени производится с помощью секундомера, то целесообразно включить его в момент начала движения тела ($t_0 = 0$).

Результаты измерений положения автомобиля в соответствующие моменты времени занесём в таблицу 1.

Таблица 1

t, мин	x, м	t, мин	x, м
0	0	7	2130
1	320	8	2250
2	1050	9	3130
3	1840	10	4130
4	2130	11	5130
5	2130	12	6130
6	2130		

В начальный момент времени автомобиль находится в начале отсчёта. За первую минуту он прошёл 320 м; за вторую значительно больше — 730 м; за третью ещё больше — 790 м, но за четвёртую минуту уже меньше — всего 290 м. Далее он,

очевидно, стоял (возможно, перед светофором), а затем по прошествии более семи минут после начала движения вновь пришёл в движение. Начиная с девятой минуты автомобиль проходил по 1000 м в минуту.

Конечно, это не очень детальное описание движения. Для более детального описания движения надо было бы определять положения автомобиля через меньшие интервалы времени: полминуты, секунду, десятую долю секунды и т. д. Важно лишь понять, что в принципе таким способом можно описать движение сколь угодно детально, выбрав очень малые интервалы времени.

Графический способ

Перейдём теперь к другому, графическому способу описания движения. Графическое описание движения удобно, так как очень наглядно. Будем откладывать вдоль горизонтальной оси моменты времени, а вдоль вертикальной — соответствующие значения координат. Соединив точки, каждая из которых соответствует координате в определённый момент времени, получим график изменения координаты со временем (рис. 1.6). Из него видно, что расстояние от начала отсчёта до автомобиля сначала увеличивается медленно, затем быстрее, а потом опять медленнее (торможение машины). Далее на протяжении нескольких минут расстояние остаётся неизменным и затем снова начинает расти. Конец графика представляет собой отрезок прямой.

График на рисунке 1.6 содержит те же сведения о движении, что и таблица 1.

Предостережём от очень наивной, но часто встречающейся ошибки. График показывает, как меняется координата автомобиля с течением времени. Получается, как видите, довольно сложная кривая. Но это ни в коей мере не означает, что само тело движется вдоль этой кривой. Движение-то является прямолинейным! **Линия, вдоль которой происходит движение точки, называется траекторией.** В рассмотренном случае траектория движения точки — прямая линия.

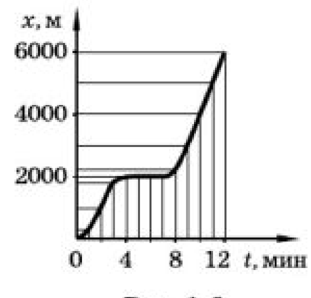


Рис. 1.6

Координата как функция времени

Остановимся ещё на одном способе описания движения, называемом аналитическим. В каждый момент времени t координата x имеет определённое значение. С течением времени происходит изменение координаты. Говоря математическим языком, это означает, что координата является функцией времени:

$$x = f(t), \text{ или } x = x(t).$$

Вид этой функции в каждом конкретном случае будет вполне определённым. Функция, описывающая движение, изображённое графически на рисунке 1.6, столь сложна, что мы не будем пытаться записать её в виде определённой формулы.

Зависимость координаты от времени даёт полное кинематическое описание движения точки вдоль оси X. В дальнейшем мы увидим, как законы механики позволяют найти вид этой функции, и познакомимся с тем, что нужно для этого знать.

В нашем распоряжении три способа описания движения: табличный, графический и наиболее полный — аналитический, выражающий функциональную зависимость координаты от времени.

? Опишите своё движение в течение определённого промежутка времени (ответ представьте в виде явного вида зависимости(ей)).

§ 1.4. РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СКОРОСТЬ

Самое простое движение — это равномерное движение по прямой. Для этого движения проще всего определить, что такое скорость.

Движение называется равномерным прямолинейным, если траектория есть прямая линия и точка за любые равные промежутки времени проходит равные расстояния.

Обратите внимание на слова «любые равные», относящиеся к промежуткам времени. Если точка за каждую минуту проходит по 1 м, то это ещё не означает, что её движение обязательно равномерное. Может быть и так, что за первую половину минуты точка проходит 20 см, за вторую половину минуты — 80 см, а в следующие интервалы времени по поло-

вине минуты она может пройти 60 и 40 см соответственно и т. д., т. е. движение является неравномерным. Для равномерного движения в данном случае необходимо, чтобы за $\frac{1}{2}$ мин было пройдено $\frac{1}{2}$ м, за $\frac{1}{4}$ мин — $\frac{1}{4}$ м, за $\frac{1}{10}$ мин — $\frac{1}{10}$ м и т. д., т. е. чтобы за любые равные промежутки времени точка проходила равные расстояния.

Если мы знаем только, что автомобиль в данный момент времени находится в определённом месте на шоссе, то мы ещё ничего не знаем о том, как он движется. Важной величиной, характеризующей движение тела, является его скорость. Со скоростью (быстротой движения тела) мы знакомы из повседневной жизни.

Черепаха перемещается с малой скоростью — примерно 0,5 км/ч, её движение — символ медлительности (черепаший шаг). Человек перемещается быстрее: его скорость около 5 км/ч. Автомобиль движется быстрее человека (100 км/ч), а самолёт ещё быстрее (1000 км/ч). Самой большой скорости относительно Земли человек достигает с помощью космических ракет (около 11 км/с). Максимально возможная скорость — это скорость света в вакууме: 300 000 км/с.

Чем больше скорость, тем большее расстояние проходит тело за данный интервал времени. *Скорость показывает, как быстро движется тело, т. е. как быстро с течением времени меняется его положение в пространстве по отношению к другим телам.*

Несмотря на то что слово «скорость» давно стало для нас привычным, определить строго, что же такое скорость для произвольного движения, не так-то просто. Мы начнём с простого случая.

По-прежнему вначале будем считать, что точка (автомобиль на шоссе) движется прямолинейно. Пусть в момент времени t_1 точка имела координату x_1, а в момент времени t_2 её координата стала равной x_2.

За интервал (или промежуток) времени $t_2 - t_1$ изменение координаты точки равно $x_2 - x_1$ (изменением любой величины, координаты в том числе, называют разность между значениями величины в конце и начале процесса изменения). Для интервала времени принято сокращённое обозначение Δt[1]:

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

[1] Значок Δ (греческая буква «дельта») обозначает в формулах изменение, приращение, промежуток, интервал, отрезок. Соответственно Δt (читается: «дельта тэ») означает не произведение двух величин Δ и t, а промежуток времени.

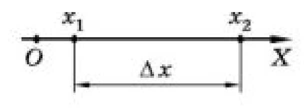


Рис. 1.7

для изменения координаты — Δx (рис. 1.7):

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

При равномерном прямолинейном движении координаты движущейся точки изменяются одинаково за любые равные промежутки времени.

Скоростью равномерного прямолинейного движения называется отношение изменения координаты тела (точки) Δx к промежутку времени Δt, за который это изменение координаты произошло[1].

Обозначим скорость через v_x. Тогда по определению имеем

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.4.1)$$

Индекс x около буквы v указывает, что рассматривается скорость точки вдоль оси X.

Скорость равномерного прямолинейного движения постоянна[2]:

$$v_x = \text{const}.$$

В самом деле, за любые равные интервалы времени изменения координат одинаковы. Поэтому одинаковы и отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Если уменьшить интервал времени в два раза, то и изменение координаты уменьшится тоже в два раза. Ведь за первую половину интервала тело проходит точно такое же расстояние, что и за вторую.

Обратите внимание на то, что скорость v_x может быть как положительной величиной, так и отрицательной.

Действительно, $\Delta t = t_2 - t_1$ всегда положительно ($\Delta t > 0$). Но изменение координаты Δx может быть как положительным ($\Delta x > 0$, если $x_2 > x_1$), так и отрицательным ($\Delta x < 0$, если $x_2 < x_1$).

Мы познакомились с очень важной физической величиной — скоростью. При равномерном прямолинейном движении скорость есть величина постоянная.

---

[1] Точнее, эту величину, как мы увидим в дальнейшем, следует называть проекцией скорости на ось X.

[2] От латинского слова constans — «постоянный».

§ 1.5. КООРДИНАТЫ И ПРОЙДЕННЫЙ ПУТЬ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Если скорость постоянна, то координата меняется со временем по простому закону.

Рассмотрим движение тела (точки) начиная с момента времени $t_0 = 0$. Пусть в начальный момент времени координата тела, называемая начальной координатой,

Рис. 1.8

равна x_0 (рис. 1.8). Тогда, обозначив координату в произвольный момент времени через x, согласно определению (1.4.1), получим

$$\upsilon_x = \frac{x - x_0}{t}. \qquad (1.5.1)$$

Отсюда

$$\boxed{x = x_0 + \upsilon_x t.} \qquad (1.5.2)$$

Из этого уравнения видно, что зависимость координаты от времени — линейная. Так как υ_x может быть как больше, так и меньше нуля, то координата x или возрастает, или убывает.

Простая формула (1.5.2) справедлива для любого момента времени только при равномерном прямолинейном движении, так как только в этом случае выражение (1.5.1) определяет скорость при любом значении t.

Итак, для определения координаты в произвольный момент времени надо знать начальную координату x_0 и скорость υ_x. Эти величины, следовательно, необходимо измерить.

Подчеркнём, что формула (1.5.2) непосредственно определяет координату движущейся точки, но не пройденный путь (длину отрезка траектории, пройденного телом за время t). При прямолинейном движении в одном направлении пройденный путь s (см. рис. 1.8) равен модулю изменения координаты:

$$s = |x - x_0|.$$

Его можно найти, зная модуль скорости $\upsilon = |\upsilon_x|$:

$$s = |\upsilon_x| t = \upsilon t. \qquad (1.5.3)$$

Единица скорости

Модуль скорости равен

$$v = |v_x| = \frac{s}{t}. \qquad (1.5.4)$$

Пользуясь этой формулой, устанавливаем единицу скорости:

$$\text{единица скорости} = \frac{\text{единица пути}}{\text{единица времени}}.$$

Следовательно, за единицу скорости принимается скорость равномерного прямолинейного движения тела (точки), при которой это тело за единицу времени проходит путь, равный единице длины.

Так, если время выражается в секундах, а расстояние (путь) — в метрах или сантиметрах, то

$$\text{единица скорости} = \frac{1\ \text{м}}{1\ \text{с}} = 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

или

$$\text{единица скорости} = \frac{1\ \text{см}}{1\ \text{с}} = 1\ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Равномерное прямолинейное движение как приближение

Отметим, что, строго говоря, равномерного прямолинейного движения не существует. Автомобиль на шоссе никогда не едет по абсолютно прямой линии; небольшие отклонения в ту или другую сторону от прямой всегда имеются. И значение скорости слегка изменяется. Небольшая неровность шоссе, порыв ветра, чуть-чуть большее нажатие на педаль газа и другие причины вызывают небольшие изменения скорости. Но приближённо на протяжении не слишком большого промежутка времени движение автомобиля можно считать прямолинейным и равномерным с достаточной для практических целей точностью. Таково одно из упрощений сложной действительности, позволяющее без больших усилий описывать многие движения. Можно привести другие примеры, в которых движение тел происходит практически прямолинейно и равномерно: моторная лодка на реке или озере, летящий самолёт, центр шарика, катящегося по гладкому горизонтальному стеклу, парашютист с раскрытым парашютом в безветренную погоду и т. д.

При равномерном прямолинейном движении точки её координата является линейной функцией времени.

§ 1.6. ГРАФИК СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ. ГРАФИК ПУТИ. ГРАФИК КООРДИНАТЫ

Познакомимся подробнее с самым наглядным способом описания движения — графическим — на примере равномерного прямолинейного движения.

График модуля скорости

При равномерном прямолинейном движении скорость $\upsilon_x = \text{const}$. Следовательно, и её модуль $\upsilon = \text{const}$, т. е. не изменяется с течением времени. Графиком зависимости модуля скорости от времени[1] является прямая AB, параллельная оси времени и расположенная выше этой оси, так как $\upsilon > 0$ (рис. 1.9).

Площадь прямоугольника $OABC$, заштрихованного на рисунке, численно равна пути, пройденному телом за время t. Ведь сторона OA в определённом масштабе есть модуль скорости υ, а сторона OC — время движения t, поэтому $s = \upsilon t$.

График скорости

В отличие от модуля скорости, скорость, определяемая выражением (1.4.1), может быть положительной или отрицательной. Поэтому графиком зависимости скорости υ_x от времени t может быть либо прямая BC, либо прямая KF (рис. 1.10). Обе прямые параллельны оси времени. Прямая BC соответствует положительному значению скорости ($\upsilon_{1x} > 0$), а прямая KF — отрицательному значению ($\upsilon_{2x} < 0$).

Площади прямоугольников $OBCD$ и $OEFK$, заштрихованных на рисунке, численно равны соответствующим измене-

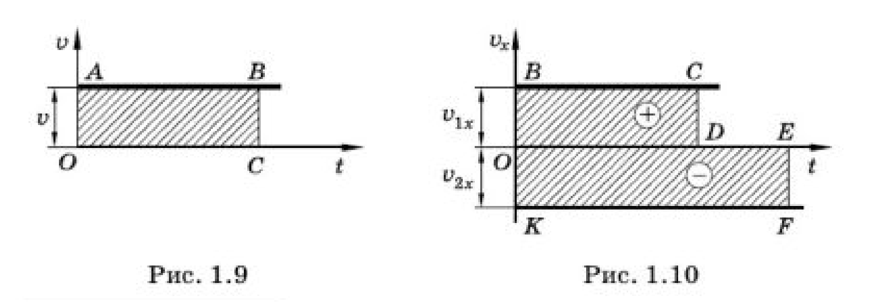


Рис. 1.9

Рис. 1.10

[1] В дальнейшем для краткости мы будем часто говорить: «график модуля скорости», «график проекции скорости» и т. д.

ниям координат движущихся тел за время их движения. Так как $\upsilon_{1x} > 0$, то изменение координаты первого тела $\Delta x_1 = \upsilon_{1x} t_1$ положительно. Поэтому и площади прямоугольника $OBCD$ приписывается положительный знак. Скорость движения второго тела отрицательна: $\upsilon_{2x} < 0$. Поэтому отрицательным будет и изменение координаты $\Delta x_2 = \upsilon_{2x} t_2$. В этом случае изменение координаты численно равно площади лежащего ниже оси времени прямоугольника $OEFK$, взятой со знаком «минус».

График пути

При равномерном прямолинейном движении путь прямо пропорционален времени, так как модуль скорости $\upsilon = \text{const}$: $s = \upsilon t$. Следовательно, графиком, выражающим зависимость пути от времени, является прямая, выходящая из начала координат ($s(0) = 0$). Помните, что путь не бывает отрицательным и не может уменьшаться в процессе движения. Чем больше модуль скорости, тем больший угол образует график с осью времени.

На рисунке 1.11 представлены графики пути *1* и *2* для двух движущихся тел. Так как за 2 с первое тело прошло путь 1 м, то модуль скорости первого тела равен $\upsilon_1 = 0{,}5$ м/с.

Модуль скорости второго тела равен $\upsilon_2 = 2$ м/с, так как за 1 с тело прошло путь 2 м.

Для того чтобы по графику зависимости пути от времени определить путь, пройденный телом за определённый промежуток времени, надо из точки на оси времени, соответствующей концу промежутка, восставить перпендикуляр до пересечения с графиком, а затем из этой точки опустить перпен-

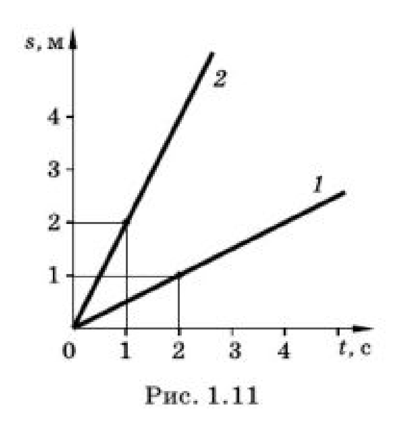


Рис. 1.11

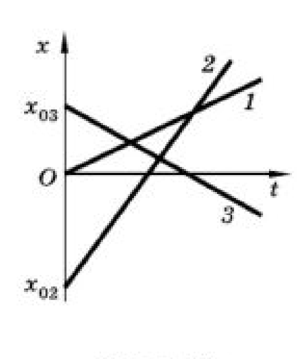


Рис. 1.12

дикуляр на ось s. Точка пересечения его с этой осью и будет значением пути в данный момент времени.

График координаты

Так как координата при равномерном прямолинейном движении является линейной функцией времени $x = x_0 + v_x t$, то график зависимости координаты от времени представляет собой прямую линию.

На рисунке 1.12 приведены графики зависимости координаты от времени для трёх случаев. Прямая *1* соответствует случаю движения при $x_{01} = 0$, $v_{1x} > 0$; прямая *2* — случаю, когда $x_{02} < 0$, $v_{2x} > 0$, а прямая *3* — случаю, когда $x_{03} > 0$, $v_{3x} < 0$. Скорость v_{2x} больше, чем v_{1x}.

Посмотрим, какие сведения можно извлечь из графика AB равномерного движения тела (рис. 1.13). В начальный момент времени ($t_0 = 0$) тело имело координату $x_0 = 3$ м, в момент времени $t_1 = 6$ с координата тела $x_1 = 0$, т. е. оно находилось в начале координат, а в момент времени $t_2 = 9$ с тело находилось на оси X в точке с координатой $x_2 = -1{,}5$ м. Всё это время тело двигалось противоположно положительному направлению оси X. Скорость тела равна $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(0 - 3)\ \text{м}}{6\ \text{с}} = -0{,}5$ м/с, а модуль скорости $v = 0{,}5$ м/с.

Обратите внимание на то, что по графику зависимости $x(t)$ можно судить о «прошлом» в движении тела, т. е. можно находить положения тела до начала отсчёта времени при условии, что и до этого момента тело двигалось равномерно и прямолинейно с той же скоростью. Моменты времени до на-

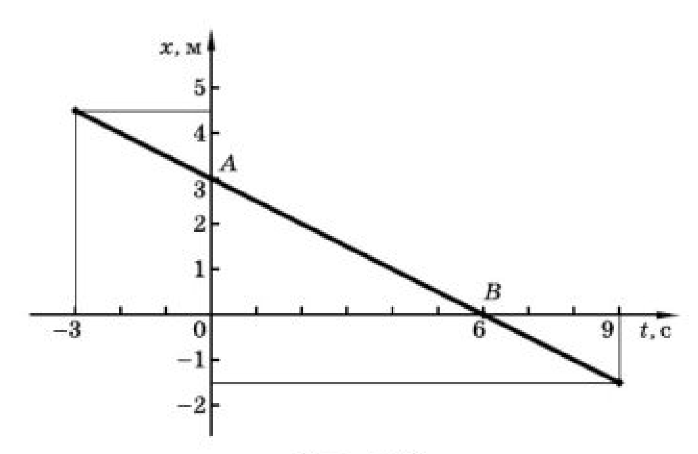


Рис. 1.13

чала отсчёта считаются отрицательными. Согласно рисунку 1.13, за 3 с до начала отсчёта времени тело имело координату 4,5 м.

Все графики равномерного прямолинейного движения представляют собой прямые линии. Для их построения достаточно указать значения $x(t)$ или $s(t)$ для двух моментов времени.

? **1.** За любые равные промежутки времени точка проходит равные пути. Является ли её движение равномерным прямолинейным?

2. Почему путь не может быть отрицательной величиной?

3. Является ли движение точки равномерным прямолинейным, если график зависимости её координаты от времени представляет собой прямую линию?

4. Какую информацию можно получить, анализируя графики равномерного движения?

§ 1.7. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ. МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ

Ни одно тело не движется всё время с постоянной скоростью. Трогаясь с места, автомобиль начинает двигаться всё быстрее и быстрее. Некоторое время он может двигаться равномерно, но рано или поздно замедляет движение и останавливается. При этом он проходит различные расстояния за одни и те же интервалы времени.

Что же надо понимать под скоростью, если тело движется неравномерно?

Средняя скорость

Введём понятие средней скорости неравномерного движения за интервал времени Δt.

Средней (по времени) скоростью неравномерного движения точки называется отношение изменения её координаты Δx к интервалу времени Δt, в течение которого это изменение произошло:

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

По форме определение средней скорости неравномерного движения не отличается от определения скорости равномерного движения. Но содержание его будет иным[1]. Теперь отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ уже не постоянно. Оно зависит как от значения интервала времени $\Delta t = t_2 - t_1$, так и от выбора начального момента времени t_1. Например, согласно таблице 1 (см. с. 34), средняя скорость автомобиля в интервале времени от 2-й до 4-й минуты равна $\frac{2130\text{ м} - 1050\text{ м}}{2\text{ мин}}$ = 540 м/мин, в интервале от 2-й до 3-й минуты равна $\frac{1840\text{ м} - 1050\text{ м}}{1\text{ мин}}$ = 790 м/мин, а в интервале от 3-й до 4-й минуты мы получаем значение $\frac{2130\text{ м} - 1840\text{ м}}{1\text{ мин}} = 290$ м/мин.

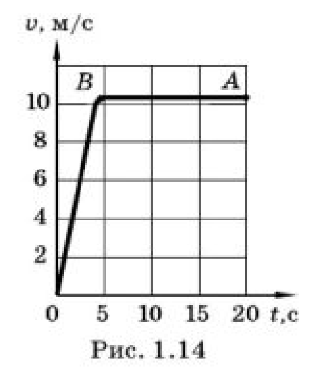


Рис. 1.14

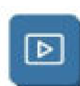
Средняя скорость характеризует движение в течение интервала времени Δt именно в среднем и ничего не говорит о том, как же движется автомобиль в различные моменты времени этого интервала.

Другой пример. На рисунке 1.14 показан график скорости спринтера при забеге на 200 м. Проанализируем этот забег. Будем считать беговую дорожку прямолинейной. С точки зрения результата нас, конечно, интересует время забега ($\Delta t = 20$ с), и поэтому бег спортсмена можно характеризовать средней скоростью. Если координатную ось X совместить с беговой дорожкой (за начало отсчёта можно принять точку на линии старта), то $\Delta x = 200$ м. Тогда $\upsilon_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200\text{ м}}{20\text{ с}} = 10$ м/с. Но спортсмена и его тренера интересуют и детали забега: сколько времени длился разбег, какую скорость развил спортсмен в конце разбега (точка B на графике). Ведь этим и будет определяться время забега. Но скорость спортсмена, соответствующая точке B графика, — это уже не средняя скорость, а скорость спортсмена в момент времени $t = 4$ с.

---

[1] Здесь и далее черта над обозначением величины означает среднее значение этой величины.

Мгновенная скорость



Мгновенную скорость естественно было бы определить как скорость тела в данный момент времени или в данной точке траектории. На первый взгляд определение очень простое и понятное. Но так ли это? Как надо, например, понимать следующее утверждение: «Скорость автомобиля в момент начала торможения была 90 км/ч»? Перефразировка этого утверждения «В момент начала торможения автомобиль за 1 ч прошёл 90 км» бессмысленна.

Утверждение это, видимо, понимать надо так: если бы начиная с указанного момента времени автомобиль не стал бы тормозить, а продолжал бы двигаться так же, т. е. с той же быстротой, то за 1 ч он прошёл бы 90 км, за 0,5 ч — 45 км, за 1 мин — 1,5 км, за 1 с — 25 м и т. д.

Результат последнего рассуждения весьма важен, ибо показывает, как в принципе можно определить мгновенную скорость автомобиля в момент t начала торможения (или любого другого тела, движущегося прямолинейно и неравномерно). Надо измерить среднюю скорость автомобиля в интервале времени от t до $t + \Delta t$ и согласиться, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени t приблизительно равна этой средней скорости. Приближение будет тем лучше и, следовательно, мгновенная скорость будет определена тем точнее, чем меньше промежуток времени Δt. Ведь надо, чтобы на этом промежутке скорость менялась незначительно, а лучше, чтобы этим изменением вообще можно было пренебречь. Последнее замечание заставляет нас брать величину Δt всё меньше и меньше, не ставя ограничения этому уменьшению. В математике это называют «стремление интервала времени Δt к нулю» и обозначают «$\Delta t \to 0$».

За очень малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ координата тела изменится также на малую величину Δx. Чтобы найти мгновенную скорость в момент времени t, надо малую величину Δx разделить на малую величину Δt и посмотреть, чему будет равно частное, если промежуток Δt неограниченно уменьшать, т. е. устремить к нулю. В математике говорят: «Найти предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю» — и записывают: $\upsilon_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где знак lim означает «предел».

Поясним сказанное на примере, когда движение тела описывается аналитически (формулой). Ведь по формуле можно найти положение тела в любой момент времени.

Пусть при движении тела вдоль оси X его координата изменяется согласно уравнению

$$x = kt^2,$$

где k — постоянный коэффициент[1].

Примем $k = 5$ м/с^2 и вычислим изменения координаты тела за интервалы времени, равные 0,1, 0,01, 0,001 с..., отсчитываемые, например, с момента времени $t_1 = 1$ с:

$$\Delta x_1 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ (1{,}1\ \text{с})^2 - 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ (1\ \text{с})^2 = 1{,}05\ \text{м},$$

$$\Delta x_2 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ (1{,}01\ \text{с})^2 - 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\ (1\ \text{с})^2 = 0{,}1005\ \text{м},$$

. . . .

Найдём теперь отношения изменений координаты к тем промежуткам времени, за которые эти изменения произошли:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{1{,}05\ \text{м}}{0{,}1\ \text{с}} = 10{,}5\ \text{м/с},$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{0{,}1005\ \text{м}}{0{,}01\ \text{с}} = 10{,}05\ \text{м/с},$$

. . . .

Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2

Δt, с	Δx, м	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$, м/с
0,1	1,05	10,5
0,01	0,1005	10,05
0,001	0,010005	10,005
0,0001	0,00100005	10,0005

Из таблицы видно, что по мере приближения интервала времени Δt к нулю отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ приближается к определённому значению (пределу), равному 10 м/с; это и есть скорость в момент времени $t_1 = 1$ с.

[1] Потом мы увидим, что именно так меняется координата падающего на землю с небольшой высоты камня.

Если тело движется по закону $x = kt^2$, то предел $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ $\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$ нетрудно вычислить. В начальный момент времени t $x_1 = kt^2$, а в момент $t + \Delta t$ $x_2 = k(t + \Delta t)^2$, следовательно, $\Delta x = x_2 - x_1 = k(t + \Delta t)^2 - kt^2 = 2kt\Delta t + k(\Delta t)^2$.

Тогда для отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ (мгновенная скорость) равен

$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2kt.$$

Для данных нашего примера $\upsilon_x = 10$ м/с.

Таким образом, для любого момента времени отношение изменения координаты тела к промежутку времени, за который это изменение произошло, стремится к определённому значению при стремлении самого промежутка времени к нулю. Полученный вывод справедлив для любого неравномерного движения.

Мгновенной скоростью при прямолинейном движении называется предел, к которому стремится отношение изменения координаты точки к интервалу времени, за которое это изменение произошло, если интервал времени стремится к нулю[1]**.**

По определению имеем

$$\upsilon_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.7.1)$$

В математике выражение $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ принято обозначать $\frac{dx}{dt}$. Тогда формулу (1.7.1) можно записать так:

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Выражение $\frac{dx}{dt}$ называется *производной координаты по времени*.

---

[1] Строго говоря, здесь речь идёт об определении проекции мгновенной скорости на ось X (см. § 1.12).

Иногда производную обозначают иначе: $\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt} = x'$ (читается «икс-штрих»).

Когда мы говорим, что скорость в данный момент времени равна 10 м/с, то это означает следующее: если бы начиная с этого момента тело продолжало двигаться равномерно целую секунду, то оно прошло бы 10 м. При равномерном движении средняя скорость за любой момент времени равна мгновенной.

В дальнейшем вы убедитесь, что именно мгновенная, а не средняя скорость играет в механике основную роль.

Как измерить мгновенную скорость

Измерить мгновенную скорость, осуществив экспериментально предельный переход $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, практически невозможно. Используя стробоскопические фотографии (рис. 1.15), можно измерить координаты тела в очень близкие моменты времени и вычислить средние скорости между этими моментами. Но мгновенную скорость так определить нельзя.

Для измерения (разумеется, приближённого) используют различные явления, которые зависят от мгновенной скорости. Так, в спидометре автомобиля гибкий тросик передаёт вращение от ведомого вала коробки передач к маленькому постоянному магниту. Вращение магнита возбуждает электрический ток в катушке, в результате чего происходит поворот стрелки спидометра.

Чтобы узнать скорость самолёта, измеряют давление встречного пото-

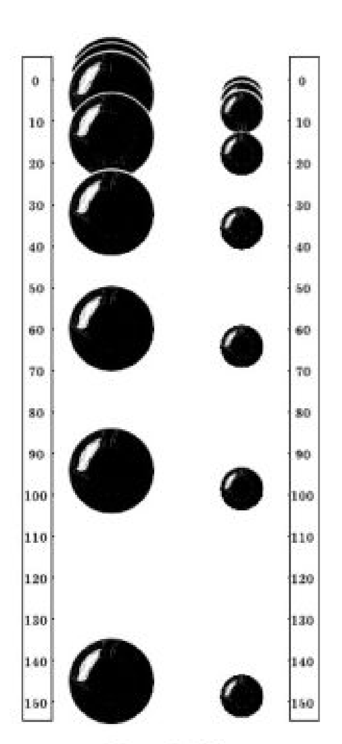


Рис. 1.15.
Рисунок с фотографии двух падающих шариков различной массы[1]

---

[1] Фотографию получили, открывая объектив и чередуя вспышки света каждые 1/30 с. Заметьте, что маленький шарик достигает пола одновременно с большим. Оба шарика начинают падать одновременно.

ка воздуха. В радарах используют изменение частоты радиоволн при отражении от движущихся тел.

При неравномерном движении скорость изменяется. Некоторое представление о движении даёт средняя скорость. Но главную роль играет скорость в любой точке в данный момент времени. Это — мгновенная скорость.

? 1. За минуту спортсмен успел пробежать стометровку по прямолинейной беговой дорожке и вернуться по ней же в исходную точку. Чему равна его средняя скорость за это время?

2. Каким образом можно рассчитать мгновенную скорость человека? Результат проверьте экспериментально.

§ 1.8. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

До сих пор мы изучали движение вдоль заранее выбранной прямой линии. Автомобиль на узком участке прямого шоссе или поезд на прямолинейном участке железной дороги иначе и не могут двигаться. На реке нет ни дорог, ни рельсов, и лодка может плыть под любым углом к берегу. Правда, ограничение движения здесь есть. Лодка перемещается в одной определённой плоскости: вдоль поверхности воды. Самолёт же может лететь как угодно: в горизонтальной плоскости, вниз или вверх. Как же описывать движение в этих более сложных случаях?

Мы ограничимся описанием только движения на плоскости. Здесь на первых порах встретится не так уж много нового. Тот приём, который был использован для описания движения вдоль заданной прямой, будет применён дважды.

Определить положение лодки в произвольном месте на реке с помощью одной координаты уже нельзя. Из курса математики вам известно, что положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Нам потребуется теперь система координат из двух взаимно перпендикулярных осей X и Y. Начало координат и направление осей выбираются произвольно. Направим ось X вдоль берега (её можно было бы провести и посередине реки), а ось Y — перпендикулярно берегу. Опустив из точки A на оси координат перпендикуляры AB и AC, найдём проекции точки A и тем самым коорди-

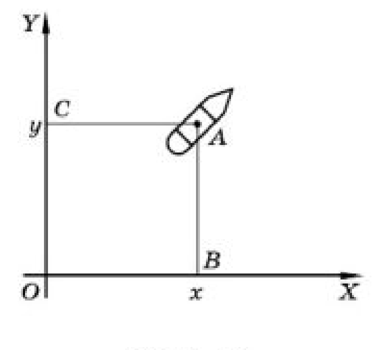


Рис. 1.16

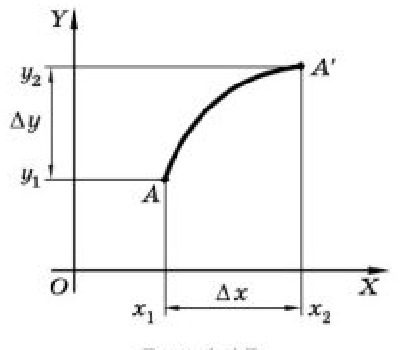


Рис. 1.17

наты x и y, которые имеет лодка (рис. 1.16). Длины отрезков AB и AC равны модулям координат лодки:

$$AC = |x|, \ AB = |y|.$$

При движении тела координаты x и y меняются с течением времени. Пусть за интервал времени Δt лодка переместилась из точки A в точку A', причём не обязательно по прямой (рис. 1.17). Если обозначить координаты лодки в начальный момент времени через x_1, y_1, а в конечный — через x_2, y_2, то изменения координат можно выразить так:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \ \Delta y = y_2 - y_1.$$

Величины Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными.

В частном случае при равномерном прямолинейном движении скорости изменения координат $\upsilon_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $\upsilon_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ не меняются с течением времени (см. § 1.4). В этом случае координата y, как и координата x, меняется с течением времени по линейному закону (1.5.2), который был получен для равномерного движения вдоль оси X:

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_x t, \\ y = y_0 + \upsilon_y t, \end{cases} \tag{1.8.1}$$

где x_0 и y_0 — координаты тела в начальный момент времени, а υ_x и υ_y — скорости изменения координат, — постоянные величины. Исключив из этих уравнений время t, получим уравнение траектории, связывающее координаты x и y:

$$y = y_0 - \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} x_0 + \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} x.$$

Введём обозначения:

$$y_0 - \frac{v_y}{v_x}x_0 = b, \quad \frac{v_y}{v_x} = k,$$

тогда получим

$$y = b + kx.$$

Так как величины b и k постоянные, то полученное уравнение является уравнением прямой. Если координаты тела меняются во времени по линейному закону, то траектория движения этого тела — прямая линия.

Движение на плоскости описывается двумя координатами x и y, зависящими от времени.

? При движении тела по плоскости уравнение траектории описывается линейной функцией. Какой функциональной зависимостью описывается траектория тела, движущегося в трёхмерном пространстве?

§ 1.9. КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО КИНЕМАТИКЕ

Настало время применить полученные знания для решения задач, вначале более простых — задач на равномерное прямолинейное движение.

Итак, вам надо решить задачу. Как правило, самое большое затруднение вызывает вопрос «С чего начать?». Универсальных правил решения любой задачи не существует. И всё же вы быстрее научитесь решать задачи, если будете руководствоваться определёнными правилами, действовать в определённой последовательности. Этими правилами можно пользоваться для решения задач не только на кинематику равномерного прямолинейного движения, но и в других случаях.

1. Внимательно, не торопясь, прочитайте условие задачи. Подумайте, о каком физическом явлении идёт в ней речь. Какие физические величины известны, а какие надо найти?

2. Изобразите на рисунке (схематически) рассматриваемые тела, направления их движения.

3. Выберите систему отсчёта. Для этого надо построить систему координат, т. е. задать её начало и положительные направления координатных осей. Кроме того, надо выбрать начало отсчёта времени. Без выбора системы отсчёта описать движение полностью невозможно.

Для описания прямолинейного движения достаточна одна координатная ось, совмещённая с траекторией движения.

Выбор системы отсчёта произволен и не влияет на конечный результат решения задачи. Но удачный выбор системы отсчёта упрощает решение задачи.

4. Запишите уравнения, описывающие движения всех тел. В случае кинематики это уравнения зависимости координат тел от времени. Далее от уравнений для значений координат и проекций заданных величин надо перейти к уравнениям для их модулей. Это непростой момент, обратите на него внимание.

В задаче могут встретиться «скрытые условия», которые надо выразить на языке уравнений. Например, при встрече двух тел в момент времени $t_в$ их координаты x_1 и x_2 равны. Это условие даёт уравнение

$$x_1(t_в) = x_2(t_в).$$

Общее число уравнений должно равняться числу неизвестных.

5. Решите систему уравнений и выразите искомые величины в общем (буквенном) виде (иногда для решения задачи достаточно одного уравнения). Полезно посмотреть, к каким результатам приводит уменьшение или увеличение величин, заданных в условии задачи. Надо проследить, чтобы наименования всех слагаемых величин в решении были одинаковы. Если у вас расстояния складываются со временем, то всё надо начинать сначала.

6. Подставьте в буквенный ответ числовые значения заданных физических величин с наименованиями их единиц. Предварительно надо выразить все числовые значения в одной системе единиц.

Выполните вычисления и получите ответ. При этом пользуйтесь правилами приближённых вычислений. Для вычислений целесообразно применять микрокалькулятор.

Перечисленные рекомендации не надо считать абсолютно жёсткими, неизменными. Всего не предусмотришь. В некоторых случаях отдельные пункты можно опустить; иногда придётся вводить новые. Многие задачи проще решать графически.

Задача 1

Тело движется равномерно вдоль оси X со скоростью $\upsilon = 2$ м/с противоположно положительному направлению оси X. Найдите положение тела в момент времени $t = 10$ с

после начала движения, если начальная координата $x_0 = 5$ м. Чему равен путь, пройденный телом?

Решение. Запишем уравнение для координаты тела:

$$x = x_0 + \upsilon_x t.$$

Согласно условию задачи, $\upsilon_x = -\upsilon$. Теперь формула для координаты принимает вид

$$x = x_0 - \upsilon t,$$

$$x = 5 \text{ м} - 2 \text{ м/с} \cdot 10 \text{ с} = -15 \text{ м}.$$

Пройденный телом путь равен

$$s = \upsilon t = 20 \text{ м}.$$

Задача 2

Из пунктов O и B, расстояние между которыми $l = 55$ км, одновременно начали двигаться с постоянными скоростями навстречу друг другу по прямому шоссе два автомобиля. Скорость первого автомобиля $\upsilon_1 = 50$ км/ч, а второго — $\upsilon_2 = 60$ км/ч. Через какое время после начала движения автомобили встретятся? Найдите пути, пройденные каждым автомобилем за это время.

Решение. Примем пункт O за начало координат и направим координатную ось X в сторону пункта B (рис. 1.18). Движение автомобилей будет описываться уравнениями

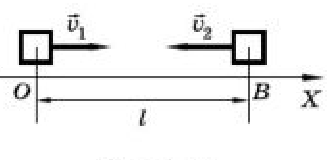


Рис. 1.18

$$x_1 = x_{01} + \upsilon_{1x} t,$$

$$x_2 = x_{02} + \upsilon_{2x} t.$$

В соответствии с выбранным началом координат

$$x_{01} = 0, \; x_{02} = l.$$

Так как первый автомобиль движется в положительном направлении оси X, а второй — в отрицательном, то

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_1, \; \upsilon_{2x} = -\upsilon_2.$$

Поэтому спустя время t

$$x_1 = \upsilon_1 t, \; x_2 = l - \upsilon_2 t.$$

Когда автомобили встретятся, они будут иметь одну и ту же координату:

$$x_1 = x_2,$$

или

$$v_1 t = l - v_2 t.$$

Отсюда

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 0{,}5 \text{ ч}.$$

Пройденные пути равны

$$s_1 = v_1 t = 25 \text{ км}, \quad s_2 = v_2 t = 30 \text{ км}.$$

Задача 3

Движение точки на плоскости описывается уравнениями

$$x = 6 \text{ м} + 3 \text{ м/с} \cdot t,$$
$$y = 4 \text{ м/с} \cdot t.$$

Определите траекторию движения точки и постройте её на плоскости XOY.

Решение. Уравнение траектории в явной форме находим, исключив из обоих уравнений время. Из первого уравнения имеем

$$t = \frac{x - 6 \text{ м}}{3 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{x}{3 \frac{\text{м}}{\text{с}}} - 2 \text{ с}.$$

Подставляя это значение во второе уравнение для координаты y, получаем уравнение траектории:

$$y = \frac{4x}{3} - 8 \text{ м}.$$

Это уравнение прямой линии. Для построения прямой заметим, что при $x = 0$ $y = -8$ м и при $y = 0$ $x = 6$ м. Построим на чертеже точки $B(0, -8)$ и $C(6, 0)$. Через эти точки и проходит прямая (рис. 1.19).

На рисунке 1.19 указано также и направление скорости движения точки.

Задача 4

На рисунке 1.20 изображён график зависимости от времени координаты точки, движущейся вдоль оси X. Как двигалась точка? Постройте графики модуля v и проекции v_x скорости, а также пути в зависимости от времени.

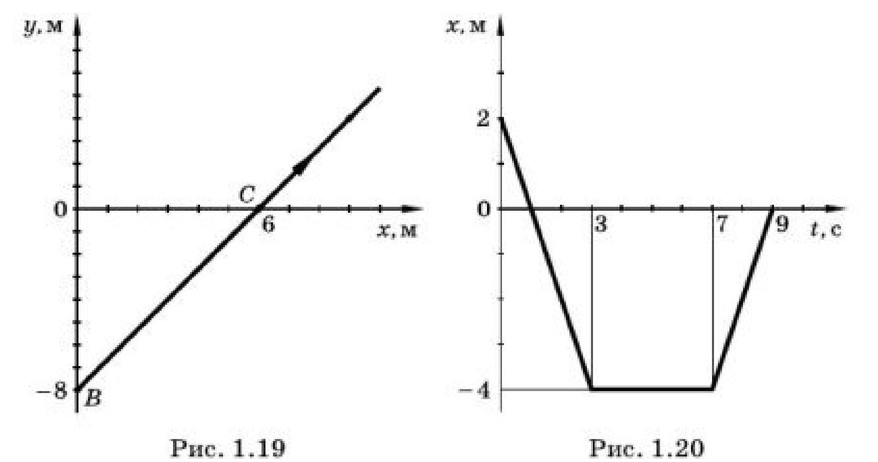


Рис. 1.19 Рис. 1.20

Решение. В течение первых 3 с координата точки изменилась от 2 м до −4 м, следовательно, точка двигалась противоположно положительному направлению оси X. Проекция скорости равнялась

$$\upsilon_{1x} = \frac{-4-2}{3}\ \text{м/с} = -2\ \text{м/с},$$

а модуль скорости $\upsilon_1 = 2$ м/с.

Следующие 4 с точка не двигалась (её координата не изменилась), т. е. $\upsilon_{2x} = 0$, а потом в течение 2 с точка двигалась в положительном направлении оси X и пришла в начало координат ($x = 0$). Проекция и модуль скорости соответственно равны

$$\upsilon_{3x} = \upsilon_3 = \frac{0-(-4)}{2}\ \text{м/с} = 2\ \text{м/с}.$$

На рисунке 1.21, *а* изображён график проекции скорости, а на рисунке 1.21, *б* — график модуля скорости. Графиком пути является ломаная линия $OABC$ на рисунке 1.21, *в*. При построении графика пути не надо забывать, что путь не может быть отрицательным и при движении не убывает.

Упражнение 1

1. Тело движется равномерно вдоль оси X противоположно её положительному направлению. Модуль скорости равен 36 км/ч. Начальная координата равна 20 м. Найдите положение тела через 4 с. Чему равен путь, пройденный телом?
2. Тело движется равномерно в положительном направлении оси X. Модуль скорости равен 28,8 км/ч. Найдите

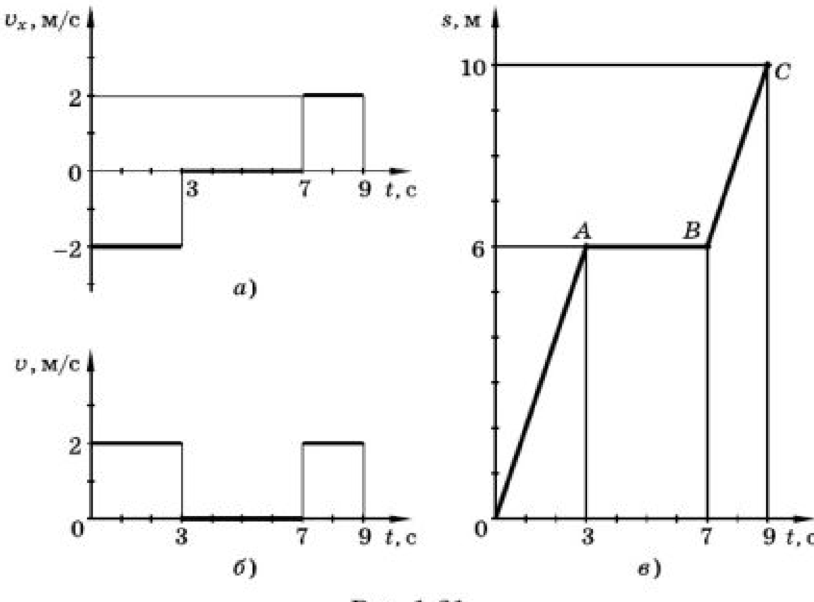


Рис. 1.21

положение тела через 5 с после начала движения, если начальная координата тела $x_0 = -40$ м. Чему равен путь, пройденный телом?

3. При движении вдоль прямой координата точки изменилась за 5 с от значения $x_0 = 10$ м до значения $x = -10$ м. Найдите модуль скорости и направление движения точки.

---

1. Опираясь на физическое определение понятия «система отсчёта», напишите эссе на тему «Моя система отсчёта».
2. Какие устройства для определения времени финиша применяются на спортивных соревнованиях (бег, горные лыжи, коньки)? Напишите в форме ретроспективного (хронологического) реферата на основе анализа устройств, используемых на олимпиадах.

§ 1.10. ВЕКТОРЫ

Если человек сделал шаг, то важно знать не только длину шага, но и направление, в котором шаг сделан[1].

---

[1] Для большей определённости надо следить за перемещением одной точки, например метки, сделанной мелом на носке ботинка.

В комнате это может быть и не так существенно, но, например, в горах неверно выбранное направление одного шага может закончиться трагически. Шаг, который вы делаете, является примером перемещения (рис. 1.22). *Любое механическое перемещение определяется как его длиной, так и направлением. Поэтому его можно изображать направленным отрезком прямой — вектором.*

Вектор перемещения, векторные величины

В механике вектором перемещения или просто перемещением называется направленный отрезок прямой, проведённый из начального положения движущейся точки в её конечное положение. Длина вектора перемещения называется его м о д у л е м.

Величины, подобные перемещению, которые, кроме своего модуля, характеризуются ещё направлением в пространстве, называются векторными. Но в отличие от математики, где вектор есть только математическое понятие и ничего больше, в физике вектор имеет определённый физический смысл: он обозначает какую-либо физическую величину. Поэтому к слову «вектор» мы должны добавить название этой физической величины. На рисунке 1.22 изображён вектор перемещения.

Обратите внимание: при криволинейном движении модуль перемещения не равен пути, пройденному точкой с момента времени t_1 до момента t_2 (рис. 1.23), т. е. длина кривой A_1A_2 больше длины вектора перемещения.

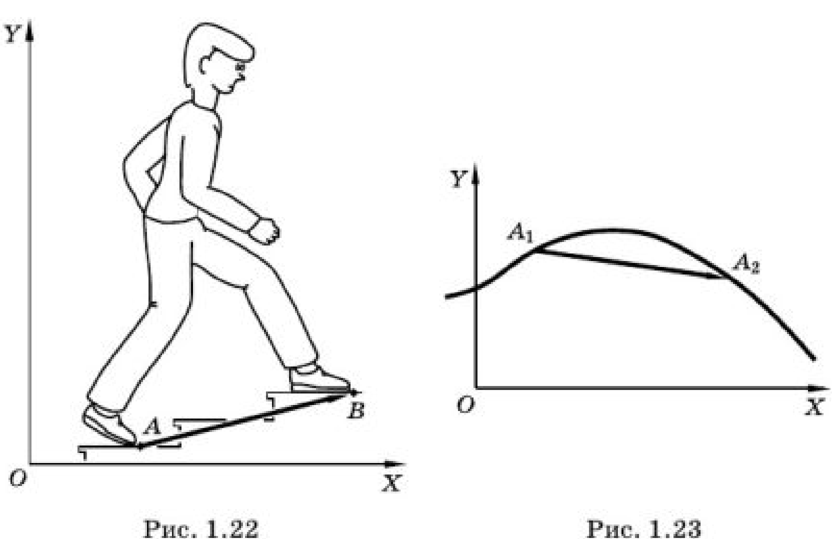


Рис. 1.22

Рис. 1.23

Векторной величиной является также скорость. Все векторные величины изображают направленными отрезками прямой, выбрав надлежащий масштаб при заданной единице этой величины. Как и для обычного отрезка, крайние точки вектора часто обозначают буквами (см. рис. 1.22). Однако, в отличие от обычного отрезка (где A, B — концы отрезка), точка A называется началом вектора, а точка B — его концом. С помощью букв A и B вектор обозначается так: $\overrightarrow{AB}$ (над AB ставится символическая стрелка, указывающая на то, что отрезок AB — направленный).

Так же как и обычный отрезок, вектор обладает длиной, которая называется его модулем и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора, так же как и длину обычного отрезка, можно обозначать одной буквой, например $|\overrightarrow{AB}| = a$. Да и сам вектор $\overrightarrow{AB}$ можно записать тоже с помощью одной буквы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Радиус-вектор

Положение тела в произвольной точке A пространства (рис. 1.24) можно задать с помощью радиуса-вектора. **Радиусом-вектором называется вектор, проведённый из начала системы координат (точка O) в данную точку пространства.** Действительно, длина радиуса-вектора $\vec{r}$ или его модуль $|\vec{r}| = r$ определяет расстояние, на котором точка A (см. рис. 1.24) находится от начала координат, а стрелка указывает направление на точку пространства. Следовательно, радиус-вектор $\vec{r}$ указывает, на каком расстоянии и в каком направлении находится точка A пространства относительно начала выбранной системы координат.

Проекции радиуса-вектора

Проекциями радиуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ (см. рис. 1.24) на координатные оси X и Y являются координаты конца этого вектора, т. е. точки A. Проекции мы будем обозначать той же буквой, что и вектор, но без стрелки над ней и с индексом внизу, указывающим, на какую ось проецируется вектор.

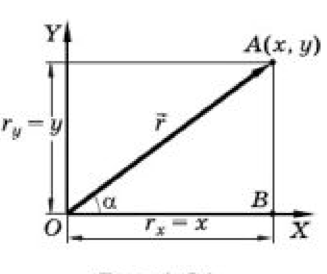


Рис. 1.24

Так, r_x и r_y — проекции вектора $\vec{r}$ на оси координат X и Y. Тогда

$$r_x = x, \quad r_y = y.$$

Проекции, как и координаты, могут быть положительными и отрицательными.

Координаты x и y точки A полностью определяют модуль радиуса-вектора и его направление на плоскости относительно координатных осей. Действительно, по известной из геометрии теореме Пифагора имеем

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = (OB)^2 + (AB)^2,$$

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол α между направлением вектора $\vec{r}$ и осью X также определяется однозначно координатами x и y; его можно измерить, например, транспортиром. Можно также вычислить по формуле

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$

а затем, пользуясь таблицами значений тригонометрических функций, определить сам угол.

Проекции вектора

Опустив перпендикуляры из начала и конца вектора перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ (рис. 1.25) на оси координат X и Y, можно найти его проекции на эти оси. Проекции перемещения есть изменения координат Δx и Δy движущейся точки. Изменения координат могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Поэтому проекции перемещения на оси координат также могут быть положительными и отрицательными.

Модуль и направление перемещения полностью определяются его проекциями на оси координат. Для модуля перемещения имеем (см. рис. 1.25)

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ определяется углом α: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если, напротив, известен вектор перемещения,

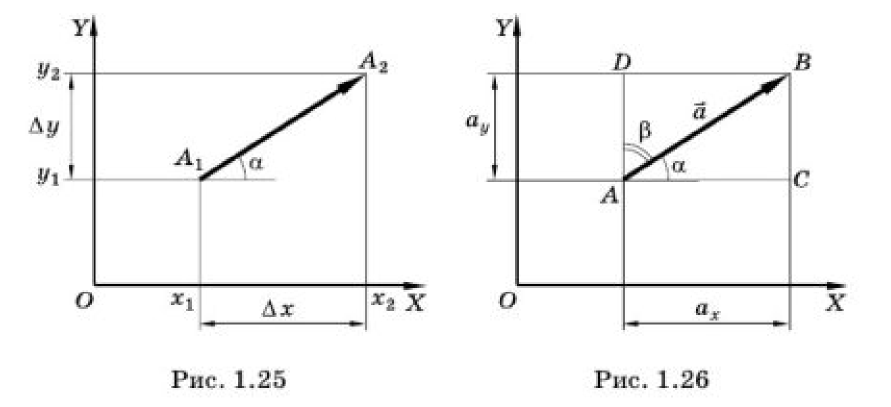


Рис. 1.25 Рис. 1.26

то однозначно определяются изменения координат Δx и Δy движущейся точки.

Проекции любого вектора находятся так же, как и проекции перемещения. Но они выражаются не в единицах длины, а в тех единицах, в которых выражается модуль данной величины.

Так как понятие проекции вектора мы будем широко использовать в дальнейшем, то дадим наиболее общее определение проекции.

Направление вектора $\vec{a}$ (рис. 1.26) можно задать углами α или β между вектором и положительными направлениями осей координат. Из рисунка видно, что модуль проекции a_x равен длине отрезка AC, а модуль проекции a_y — длине отрезка AD. Из прямоугольных треугольников ABC и ABD следует:

$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha, \\ a_y = a\cos\beta. \end{cases} \quad (1.10.1)$$

Проекция (или компонента) любого вектора на ось равна произведению модуля вектора и косинуса угла, образованного вектором с положительным направлением оси.

Формулы (1.10.1) показывают, что проекции вектора есть алгебраические величины, т. е. могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Знак проекции определяется знаком косинуса. Для острых углов $\cos\alpha > 0$, поэтому $a_x > 0$. Для тупых углов косинусы отрицательны, поэтому отрицательными являются проекции вектора на ось. Если $\alpha = 90°$, то $\cos\alpha = 0$ и $a_x = 0$. Для наглядности

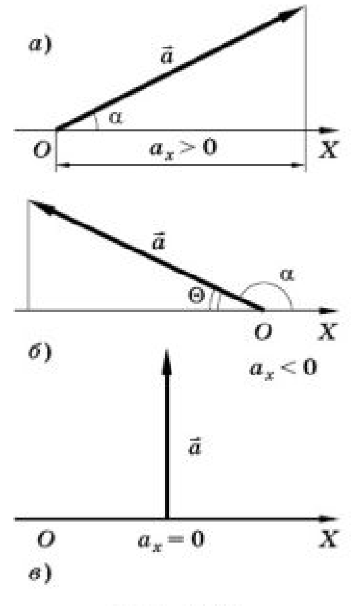


Рис. 1.27

эти случаи изображены на рисунке 1.27, *а, б, в*. В случае, соответствующем рисунку 1.27, *б*, можно записать:

$$a_x = a\cos\alpha = -a\cos\theta.$$

Скаляры

Конечно, не все величины характеризуются направлением. Число горошин в стручке, длина предмета, температура, электрический заряд и т. д. характеризуются одним числом (это число может быть положительным, отрицательным или нулём). Подобные величины принято называть скалярами.

Значения скаляров не зависят от выбранной системы отсчёта.

Положение точки на плоскости и её перемещение могут быть заданы с помощью векторов. Вектор на плоскости определяется двумя числами — проекциями на оси прямоугольной системы координат. Наоборот, задание, например, радиуса-вектора $\vec{r}$ эквивалентно заданию координат x и y, а задание вектора перемещения эквивалентно заданию изменений координат Δx и Δy движущейся точки. Модуль вектора — неотрицательное число, а проекция может быть как положительной, так и отрицательной величиной (или равной нулю).

При движении точки её радиус-вектор меняется со временем, т. е. является функцией времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Это выражение есть сокращённая запись двух уравнений $x = x(t)$ и $y = y(t)$, описывающих движение на плоскости. Вместо двух уравнений (в общем случае движения в пространстве — трёх) для координат или других величин, изменяющихся со временем, можно записать одно уравнение для векторов.

Впоследствии вы сможете убедиться в преимуществе использования векторов. Использование векторов значительно облегчает описание движения, делает его более наглядным, экономным и компактным.

Прямолинейное движение тоже можно описывать с помощью векторов. Однако заметных преимуществ это не даёт.

? 1. Вектор $\vec{a}$ задан на плоскости своими проекциями на оси X и Y: $a_x = -2$ см, $a_y = 0$. Найдите модуль и направление вектора.

2. Вектор $\vec{a}$ задан на плоскости своими проекциями на оси X и Y: $a_x = 2$ см, $a_y = 2$ см. Найдите модуль и направление вектора.

§ 1.11. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить некоторые действия над векторами, известные вам из курса геометрии: сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число. Но нам придётся сделать дополнение к изучавшемуся в геометрии материалу: познакомиться с нахождением проекций вектора при сложении и вычитании векторов.

Сложение векторов

Если заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то их можно сложить по правилам параллелограмма или треугольника (рис. 1.28). Вектор $\vec{c}$ является их суммой: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. В первом случае суммарный вектор представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на составляющих векторах как на сторонах (начала всех трёх векторов совпадают). Во втором случае поступают так: с концом вектора $\vec{a}$ совмещают начало вектора $\vec{b}$. Соединив затем начало первого вектора с концом второго, получают суммарный вектор. Обратите внимание на то, что при сложении векторов модуль результирующего вектора в общем случае не равен сумме модулей слагаемых векторов (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон). Равенство имеет место лишь при сложении одинаково направленных векторов.

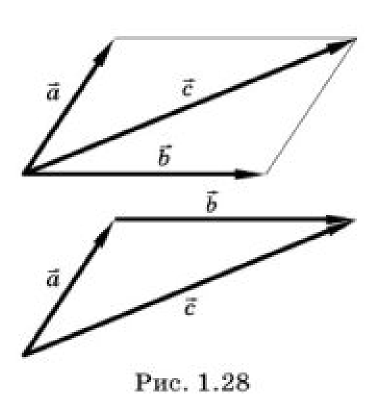


Рис. 1.28

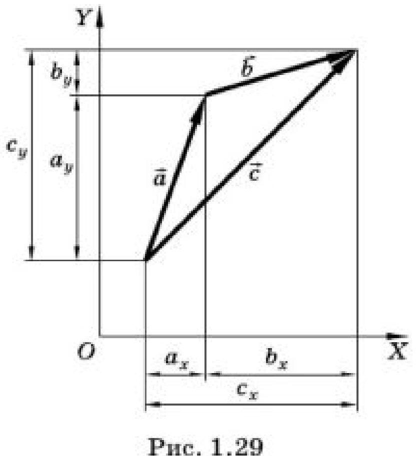


Рис. 1.29

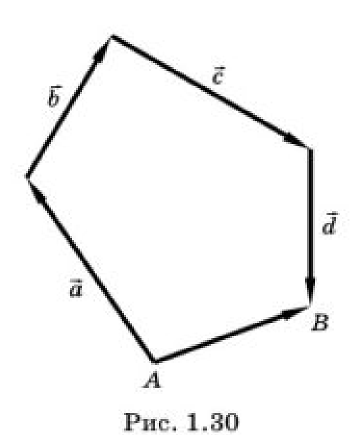


Рис. 1.30

Для дальнейшего очень важно уяснить, что *проекции суммарного вектора на координатные оси равны сумме проекций слагаемых векторов*:

$$c_x = a_x + b_x,\ c_y = a_y + b_y.$$

Это непосредственно видно из рисунка 1.29.

Если складываются несколько векторов, то правило треугольника легко обобщается на правило многоугольника сложения векторов. Для этого выбирают произвольную точку A и в неё переносят начало первого вектора. Далее к концу первого вектора приставляют начало второго, к концу второго — начало третьего и т. д. Суммарным является вектор $\overrightarrow{AB}$, проведённый из начала первого в конец последнего (рис. 1.30).

Умножение вектора на число

Пусть требуется умножить вектор $\vec{a}$ на число n. Если число n положительное, то в результате умножения получится новый вектор $\vec{b} = n\vec{a}$, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, но модуль в n раз больший (рис. 1.31, *а*).



Рис. 1.31

Если вектор умножить на отрицательное число k ($k < 0$), то получится вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, направленный противоположно вектору $\vec{a}$ (рис. 1.31, *б*). Модуль вектора $\vec{c}$ равен $c = |k|a$, а проекция вектора $\vec{c}$ равна $c_x = ka_x$.

Вычитание векторов

Напомним теперь правило вычитания векторов. Когда мы имеем дело с числами, то вычитание одного числа из другого означает то же самое, что прибавление к уменьшаемому нового числа, противоположного по знаку вычитаемому, например 10 − 6 = 10 + (−6). Подобным образом выполняется и вычитание векторов. Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ (рис. 1.32, *а*) — это то же самое, что прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор $-\vec{b}$, отличающийся от вектора $\vec{b}$ тем, что он направлен в противоположную сторону (знак «минус» указывает здесь противоположность направления): $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Модули векторов $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ равны, а их направления противоположны (такие векторы называют противоположными). Проекции противоположных векторов имеют противоположные знаки. Сами же векторы не могут быть ни положительными, ни отрицательными.

Можно находить разность векторов и несколько иначе. Если нарисовать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходящими из одной точки (рис. 1.32, *б*), то разность векторов изобразится вектором $\vec{c}$, проведённым из конца «вычитаемого» вектора к концу «уменьшаемого» вектора.

При вычитании векторов вычитаются и их проекции на координатные оси. Если $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $c_x = a_x - b_x$ и $c_y = a_y - b_y$.

Для проекций на ось X это непосредственно видно на рисунке 1.32, *в*.

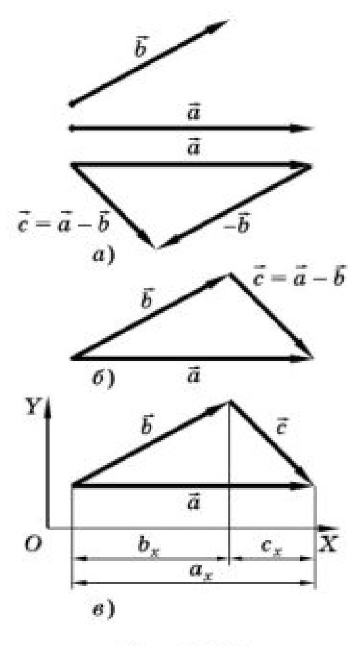


Рис. 1.32

Разложение вектора на составляющие

Из правил действия над векторами следует, что любой вектор можно бесконечным числом способов представить как сумму двух других векторов. Например, вектор $\vec{a}$ (рис. 1.33) можно выразить так:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{e} = \ldots$$

При этом векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$ и т. д. называются составляющими вектора $\vec{a}$, а само представление вектора $\vec{a}$ в виде суммы двух других векторов называется разложением вектора на его составляющие. В дальнейшем на многих примерах мы убедимся, что разумное разложение векторов упрощает решение ряда задач.

Радиус-вектор и вектор перемещения

Пусть точка A перемещается на плоскости из положения A_1 в положение A_2. Эти положения точки в системе координат XOY определяются радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 1.34).

Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ (см. рис. 1.34) есть не что иное, как разность двух векторов $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_1$: $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. В процессе движения точки A её радиус-вектор изменяется по модулю и направлению. Изменение величины, как об этом уже говорилось, обозначается символом Δ (дельта), по-

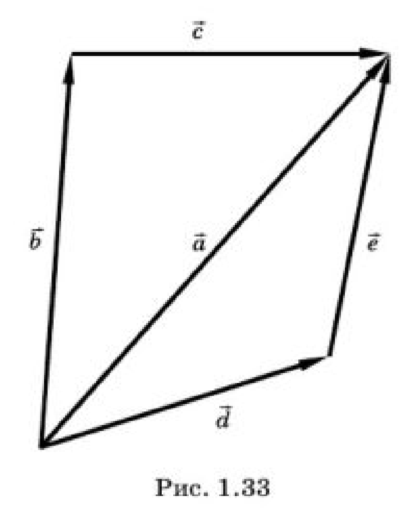


Рис. 1.33

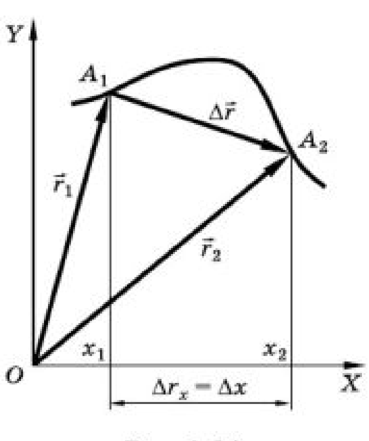


Рис. 1.34

этому $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Теперь перемещение можно определить иначе, чем это было сделано в § 1.10.

Перемещением движущейся точки называется изменение её радиуса-вектора.

Согласно определению, перемещение (см. рис. 1.34) равно

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (1.11.1)$$

В § 1.3 мы уже говорили, что для математического описания движения необходимо уметь находить положение тела в любой момент времени. Описать движение тела — это значит описать движение его точек. Положение точки можно задать радиусом-вектором. Следовательно, для описания движения надо уметь определять радиус-вектор точки в любой момент времени. Из рисунка 1.34 видно, что если известен радиус-вектор $\vec{r}_1$ в какой-то момент времени и известно перемещение $\Delta\vec{r}$, то можно найти радиус-вектор $\vec{r}_2$ в любой последующий момент времени: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$. Обычно радиус-вектор в начальный момент времени t_0 обозначают через $\vec{r}_0$, а в любой другой момент времени t — через $\vec{r}$. Поэтому

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}. \qquad (1.11.2)$$

Это уравнение справедливо для любого движения — прямолинейного и криволинейного, равномерного и переменного.

Чтобы найти положение точки в любой момент времени, т. е. найти радиус-вектор $\vec{r}$, надо знать начальное положение точки, определяемое радиусом-вектором $\vec{r}_0$, и уметь вычислять перемещение $\Delta\vec{r}$.

Векторному уравнению (1.11.2) для движения на плоскости соответствуют два уравнения в координатной форме. Чтобы перейти к этим уравнениям, надо использовать проекции векторов на оси координат. Зная, что проекциями радиусов-векторов являются координаты концов этих векторов и что проекции перемещения равны изменениям координат, получим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \Delta x, \\ y &= y_0 + \Delta y. \end{aligned} \qquad (1.11.3)$$

Уравнение (1.11.2) есть компактная форма записи уравнений (1.11.3). В случае движения в пространстве к уравнениям (1.11.3) добавляется ещё одно:

$$z = z_0 + \Delta z.$$

Чтобы найти положение точки на плоскости в любой момент времени (координаты x, y), надо знать её начальное положение (координаты x_0, y_0) и уметь вычислять изменения координат Δx, Δy точки при движении.

Дальнейшая наша цель будет заключаться в том, чтобы научиться вычислять $\Delta\vec{r}$ или Δx, Δy при движении точки.

Мы повторили правила действия над векторами и познакомились с правилами действия над их проекциями. Научились раскладывать вектор на составляющие. Выяснили, что вектор перемещения равен разности двух радиусов-векторов.

? **1.** Запишите в векторном виде уравнение равномерного прямолинейного движения точки.

2. Два вектора лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны. Куда направлен вектор их суммы и чему равен его модуль, если модули слагаемых векторов различны; одинаковы? Сделайте рисунки.

3. Вектор $\vec{c}$ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите модуль вектора $\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы на плоскости следующими значениями своих проекций: $a_x = 4$ см, $b_x = -1$ см, $a_y = 2$ см, $b_y = -6$ см.

4. Два вектора расположены на одной прямой и направлены в одну сторону. Куда направлен вектор их разности и чему равен его модуль? Ответьте на этот же вопрос, если векторы направлены в противоположные стороны.

5. Вектор $\vec{c}$ является разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите модуль вектора $\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы следующими значениями своих проекций: $a_x = -1$ см, $b_x = 2$ см, $a_y = -2$ см, $b_y = -6$ см.

§ 1.12. СКОРОСТЬ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Подобно перемещению, скорость является вектором. Она характеризует не только быстроту движения тела, но и направление его движения. Говорят о направ-

лении движения пешехода, машины, лодки, самолёта, ракеты и т. д.

Под направлением движения тела в некоторый момент времени принято понимать направление его скорости в этот момент. Скорость $\vec{v}$ можно изобразить направленным отрезком (стрелкой), длина которого в определённом масштабе характеризует модуль скорости (рис. 1.35).

Средняя скорость

Понятие вектора скорости вводится в принципе таким же способом, как и понятие скорости изменения координаты тела (см. § 1.7). Вектор средней (по времени) скорости равен отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt, за который это перемещение совершилось:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.12.1)$$

Направление вектора средней скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.36).

Мгновенная скорость

Средняя скорость, определяемая выражением (1.12.1), сама по себе не играет практически существенной роли. На-

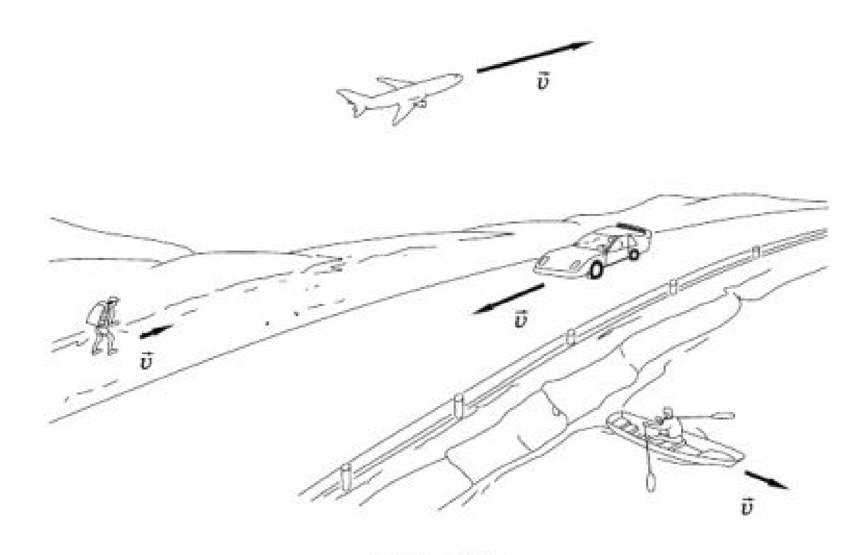


Рис. 1.35

пример, при посадке на Луну космического аппарата или при стыковке космических кораблей необходимо знать не среднюю скорость, а скорость в каждое мгновение, в каждой точке сложной криволинейной траектории — мгновенную скорость. Но чтобы ввести понятие мгновенной скорости произвольного криволинейного движения, надо воспользоваться понятием средней скорости. Приём, используемый здесь, вполне подобен приёму, применяемому при введении понятия мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения.

При уменьшении интервала времени Δt перемещения $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$, ... точки A, движущейся по криволинейной траектории, уменьшаются по модулю и меняются по направлению (рис. 1.37). Соответственно средние скорости $\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\vec{r}_3}{\Delta t}$, ... меняются по модулю и направлению. Но по мере приближения интервала Δt к нулю отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ приближается к определённому предельному значению. Это предельное значение мы будем называть мгновенной скоростью.

Итак, **мгновенной скоростью называется предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt, в течение которого это перемещение произошло, если интервал времени стремится к нулю.**

По определению имеем

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.} \qquad \textbf{(1.12.2)}$$

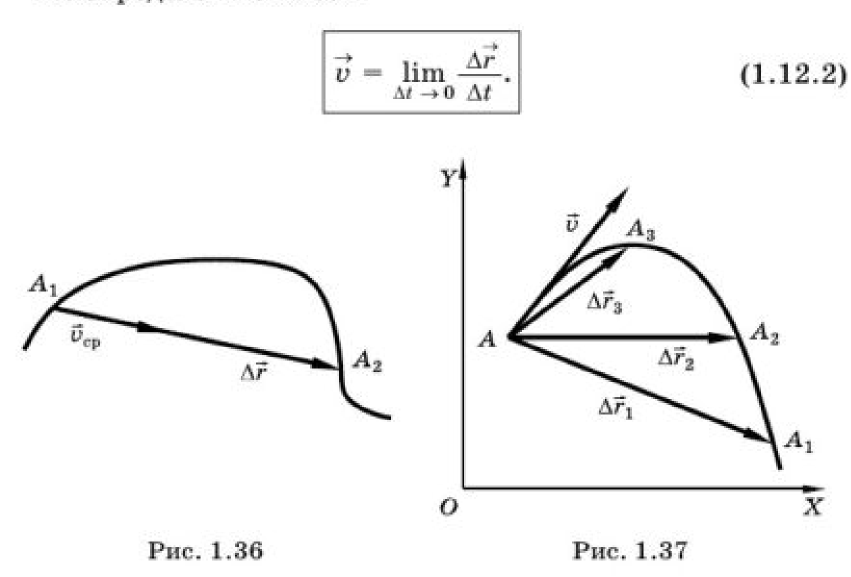


Рис. 1.36 Рис. 1.37

Мгновенную скорость, как и в § 1.7, можно записать с помощью производной:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t).$$

Эта величина характеризует быстроту изменения радиуса-вектора движущейся точки во времени.

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории. Действительно, при уменьшении интервала Δt вектор $\Delta\vec{r}$ уменьшается по модулю и его направление приближается к направлению касательной к траектории, проведённой в точке A. В предельном случае бесконечно малого интервала времени dt вектор перемещения совпадает с бесконечно малым участком траектории, т. е. направлен по касательной к ней. А вектор скорости всегда направлен так же, как и вектор перемещения.

В частности, скорость точки, движущейся по окружности, направлена по касательной к этой окружности. Это нетрудно наблюдать. Если маленькие частички отделяются от вращающегося диска, то они летят по касательной, так как имеют в момент отрыва скорость, равную скорости точек на окружности диска. Вот почему грязь из-под колёс буксующей машины летит по касательной к окружности колёс (рис. 1.38, *а*). Также по касательной летят раскалённые частицы точильного камня, отрывающиеся от вращающегося диска, если коснуться его поверхности стальным резцом (рис. 1.38, *б*).

Так как изменения координат Δx, Δy и Δz являются проекциями вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ на соответствующие оси координат (см. § 1.11), то скорости изменения координат

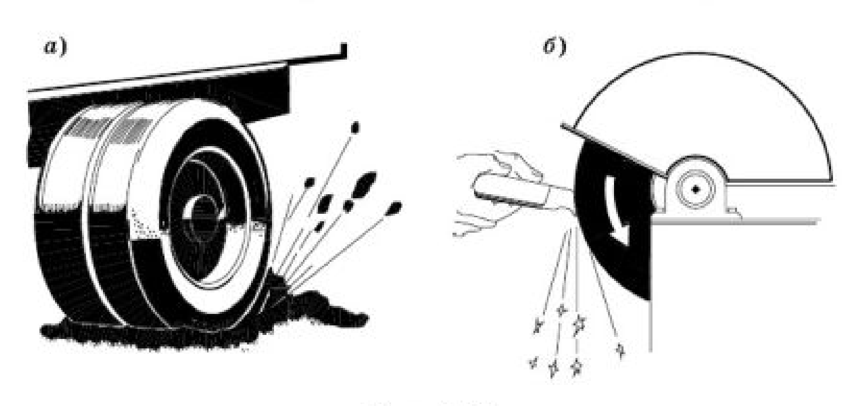


Рис. 1.38

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\quad}{\quad}, \ v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \ v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \qquad (1.12.3)$$

$$\left(\text{или } \ v_x = \frac{dx}{dt}, \ v_y = \frac{dy}{dt}, \ v_z = \frac{dz}{dt} \right)$$

являются проекциями на оси X, Y и Z вектора скорости v движущейся точки[1]. Формула для мгновенной скорости (1.12.2), по существу, есть символическая запись трёх выражений (1.12.3).

Модуль вектора скорости определяется через его проекции по общему для всех векторов правилу:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (1.12.4)$$

Направление вектора $\vec{v}$ определяется его проекциями v_x, v_y и v_z так же однозначно, как определяется направление вектора $\vec{r}$ координатами x, y и z конца этого вектора.

В случае движения с постоянной скоростью система уравнений (1.8.1) эквивалентна одному векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \qquad (1.12.5)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки в момент времени t, $\vec{r}_0$ — начальный радиус-вектор. Это непосредственно следует из того факта, что проекция суммарного вектора равна сумме проекций слагаемых векторов (см. § 1.11).

Подобно радиусу-вектору и перемещению, скорость является вектором. Мгновенная скорость или скорость в точке представляет собой производную радиуса-вектора по времени.

?

1. Изобразите траекторию своего движения в течение дня. Покажите на данном рисунке следующие векторы: радиус-вектор, перемещение, среднюю и мгновенную скорость.
2. Каким выражением определяется модуль вектора скорости? Как оно получено?
3. Почему при вычислении мгновенной скорости используется производная?

---

[1] Каждая из этих формул есть не что иное, как определение мгновенной скорости (1.7.1) для прямолинейного движения вдоль осей X, Y, Z. Впрочем, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением движения на плоскости и поэтому не будем пользоваться осью Z и соответственно v_z.

§ 1.13. СРЕДНИЙ МОДУЛЬ СКОРОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Очень часто, например при составлении расписания движения автобусов, поездов и других средств транспорта, нужно уметь оценивать время, необходимое для прохождения определённого пути. Или, наоборот, знать приблизительно путь, проходимый за какое-либо определённое время. Для этого необходимо ввести понятие ещё одной средней скорости.

Конечно, если бы мы знали мгновенную скорость в каждой точке траектории, то обе задачи могли бы быть решены. Но ведь заранее знать скорость, например, автобуса в каждой точке практически невозможно. Дорожные условия, светофоры, интенсивность движения на дороге и другие факторы влияют на мгновенную скорость движения. Не поможет здесь и знание вектора средней скорости. Так как автомобиль в конце рабочего дня возвращается в гараж, то модуль вектора перемещения за день равен нулю и равен нулю модуль средней скорости: $v_{ср} = 0$. Между тем автомобиль прошёл большой путь, измеряемый счётчиком, находящимся в самом автомобиле. Ясно, что определить пройденный путь с помощью вектора средней скорости нельзя.

Поэтому целесообразно ввести ещё одну величину — средний модуль скорости $\bar{v}$ (путевую скорость), равный (по определению) отношению пути s (т. е. длины траектории) к промежутку времени t, за который этот путь пройден:

$$\bar{v} = \frac{s}{t}. \qquad (1.13.1)$$

Ясно, что средний модуль скорости — это скалярная величина. Когда говорят о скорости движения поездов, судов, пешеходов и т. п., то имеют в виду именно путевую скорость. К примеру, расстояние от Москвы до Тулы, равное 180 км, поезд проходит за 3 ч. Средний модуль скорости равен 60 км/ч. Совершенно очевидно, что не всегда поезд имел именно такую скорость. При отправлении от станций скорость поезда увеличивалась, а при торможении уменьшалась и равнялась нулю во время стоянок. На некоторых участках пути она была и более 60 км/ч. Но если бы поезд двигался с постоянной скоростью 60 км/ч, то он путь от Москвы до Тулы прошёл бы за 3 ч, как и при неравномерном движении.

Надо отчётливо представлять себе, что путевая скорость при движении тела не является постоянной величиной. Она зависит как от значения интервала времени $\Delta t = t_2 - t_1$, так и от выбора начального момента времени t_1. Например, согласно таблице 1, средний модуль скорости на интервале от 2-й до 4-й минуты равен $\frac{2130 \text{ м} - 1050 \text{ м}}{2 \text{ мин}} = 540$ м/мин, на интервале от 2-й до 3-й минуты он равен $\frac{1840 \text{ м} - 1050 \text{ м}}{1 \text{ мин}} =$ $= 790$ м/мин, а на интервале от 3-й до 4-й минуты получаем значение $\frac{2130 \text{ м} - 1840 \text{ м}}{1 \text{ мин}} = 290$ м/мин.

Именно знание путевой скорости позволяет приближённо вычислить путь, пройденный за определённое время, или время прохождения определённого пути.

? На первом участке пути тело двигалось со скоростью v_1, а на втором — со скоростью v_2. Возможна ли ситуация, в которой путевая скорость движения тела равна среднему арифметическому скоростей v_1 и v_2?

§ 1.14. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Первую половину прямолинейного участка пути турист прошёл со скоростью $v_1 = 4{,}8$ км/ч, а вторую половину — со скоростью $v_2 = 3{,}6$ км/ч. Чему равна средняя скорость движения туриста на всём участке пути?

Решение. При решении этой задачи мы некоторые пункты из рекомендованных советов опустим. Здесь нет надобности в выборе системы координат и составлении уравнения, описывающего движение туриста. Важно лишь знать, что такое средняя скорость. (В данном случае средняя скорость и средний модуль скорости совпадают.) Решение этой задачи поучительно ещё и тем, что не надо бояться временно в процессе решения вводить величины, значения которых в условии задачи не даны.

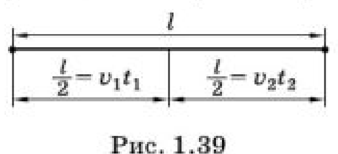


Рис. 1.39

Обозначим весь путь, пройденный туристом, буквой l (рис. 1.39),

а время, за которое этот путь пройден, — буквой t. Тогда, согласно определению, средняя скорость туриста на всём пути равна

$$\bar{v} = \frac{l}{t}. \qquad (1.14.1)$$

Время t складывается из времени t_1 прохождения туристом первой половины пути $\left(t_1 = \frac{l}{2v_1}\right)$ и времени t_2 прохождения им второй половины пути $\left(t_2 = \frac{l}{2v_2}\right)$:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2v_1} + \frac{l}{2v_2} = \frac{l(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}.$$

Подставляя это выражение для времени t движения туриста в формулу (1.14.1), получим

$$\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \approx 4{,}1 \text{ км/ч}.$$

Задача 2

Координаты точки при равномерном прямолинейном движении на плоскости XOY за время $t = 2$ с изменились от начальных значений $x_0 = 5$ м, $y_0 = 7$ м до значений $x = -3$ м, $y = 1$ м. Найдите модуль скорости точки. Изобразите вектор скорости на рисунке.

Решение. Для нахождения модуля скорости надо знать проекции скорости на оси координат. Из уравнений $x = x_0 + v_xt$ и $y = y_0 + v_yt$ находим обе проекции скорости:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t} = -4 \text{ м/с}, \ v_y = \frac{y - y_0}{t} = -3 \text{ м/с}.$$

Определим модуль скорости (см. § 1.12):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5 \text{ м/с}.$$

Положение точки в начальный и конечный моменты времени, её траектория и вектор скорости изображены на рисунке 1.40.

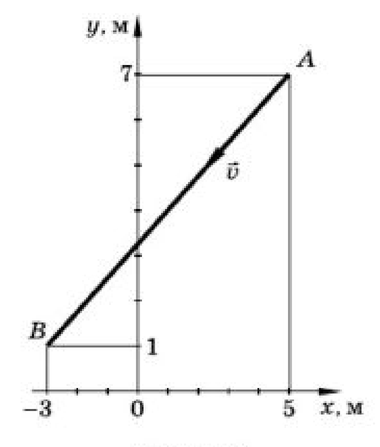


Рис. 1.40

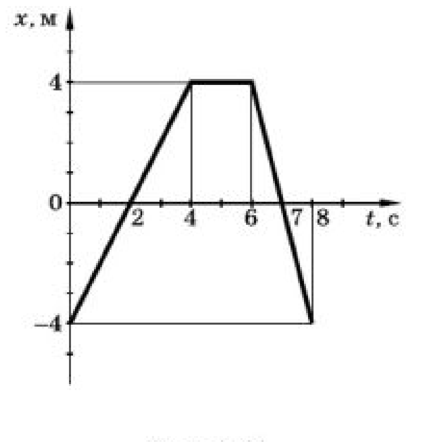


Рис. 1.41

Упражнение 2

1. Координаты точки при равномерном прямолинейном движении на плоскости XOY за время $t = 2$ с изменились от начальных значений $x_0 = -3$ м и $y_0 = -2$ м до значений $x = 5$ м и $y = 6$ м. Найдите модуль и направление скорости точки. Постройте траекторию и укажите направление скорости на рисунке.

2. Точка M совершает движение на плоскости XOY. Координаты точки в зависимости от времени изменяются так:

$$x = -4 \text{ м/с} \cdot t,\ y = 6 \text{ м} + 2 \text{ м/с} \cdot t.$$

Запишите уравнение траектории $y = y(x)$ точки M. Найдите начальные координаты движущейся точки и её координаты через 1 с после начала движения.

3. На рисунке 1.41 изображён график зависимости координаты от времени, когда точка движется вдоль оси X. Опишите характерные особенности движения точки: в каких направлениях двигалась точка относительно оси X в различные интервалы времени; в какой момент времени точка была в начале координат; чему равнялись проекции и модули скоростей за отдельные интервалы времени? Постройте графики проекции и модуля скорости, а также пути в зависимости от времени.

4. Может ли график зависимости пути от времени иметь вид, представленный на рисунке 1.42?

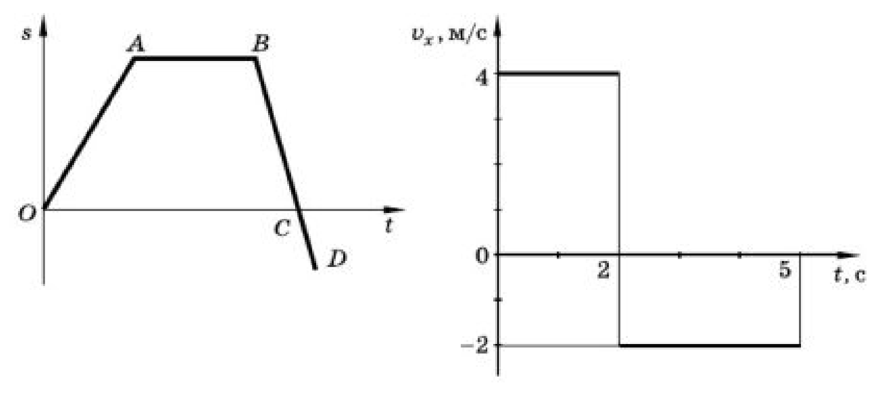


Рис. 1.42 Рис. 1.43

5. На рисунке 1.43 представлен график зависимости от времени проекции скорости точки, движущейся вдоль оси X. Начертите графики координаты и пути в зависимости от времени. Начальная координата точки $x_0 = -8$ м.

6. Один локомотив прошёл первую половину пути l со скоростью $\upsilon_1 = 80$ км/ч, а вторую половину пути — со скоростью $\upsilon_2 = 40$ км/ч. Другой локомотив шёл половину времени t со скоростью $\upsilon_1 = 80$ км/ч, а половину времени — со скоростью $\upsilon_2 = 40$ км/ч. Найдите средние модули скоростей обоих локомотивов.

7. По шоссе со скоростью $\upsilon_1 = 16$ м/с движется автобус. Человек находится на расстоянии $a = 60$ м от шоссе и на расстоянии $b = 400$ м от автобуса. В каком направлении должен бежать человек, чтобы оказаться в какой-либо точке шоссе одновременно с автобусом или раньше его? Человек может бежать со скоростью $\upsilon_2 = 4$ м/с.

8. Лодку тянут за верёвку с крутого берега с постоянной по модулю скоростью $\vec{\upsilon}$. Найдите зависимость модуля скорости u лодки от угла α между верёвкой и горизонтальным направлением (рис. 1.44).

---

1. Каково значение и происхождение терминов «вектор» и «скаляр»? Сделайте энциклопедическую справку, используя различные информационные источники.

2. Как вы понимаете смысл фразы: «Вопрос о векторе развития науки может быть рассмотрен в нескольких плоскостях»?

3. Изобразите в виде куба векторов (трёхмерная система координат) ваши жизненные цели (возможно изобразить и в n-мерном измерении). Обозначьте на осях временной мас-

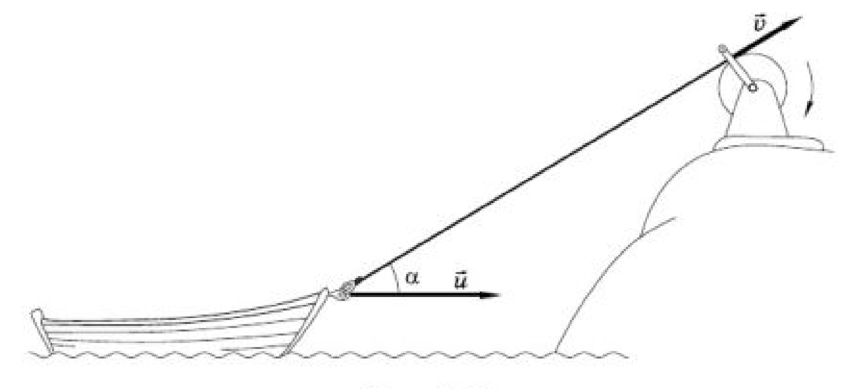


Рис. 1.44

штаб достижения обозначенных целей. Спрогнозируйте степень достижения ваших целей (изобразите с помощью радиуса-вектора).

4. Каким образом составляется расписание движения автобусов, поездов и других средств транспорта? Какие компьютерные программы в настоящее время помогают это сделать? Как называется профессия человека, составляющего расписание транспортных средств?

§ 1.15. УСКОРЕНИЕ

Введём ещё одну физическую величину, характеризующую движение, — ускорение. Необходимость введения ускорения первым понял Галилей.

При движении тел их скорости обычно меняются либо по модулю, либо по направлению, либо же одновременно и по модулю, и по направлению. Так, например, скорость шайбы, скользящей по льду, уменьшается с течением времени до полной её остановки. Если взять в руки камень и разжать пальцы, то при падении камня его скорость быстро нарастает. Скорость любой точки окружности точила при неизменном числе оборотов в единицу времени меняется только по направлению, оставаясь постоянной по модулю (рис. 1.45). Если бросить камень под углом к горизонту, то его скорость будет меняться и по модулю, и по направлению.

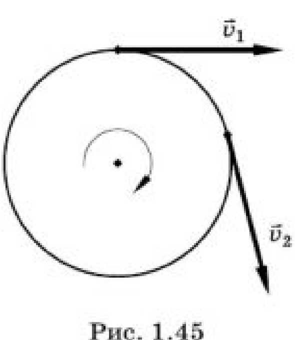


Рис. 1.45

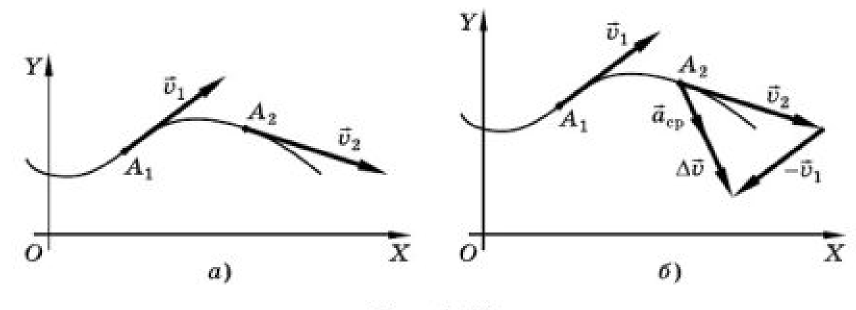


Рис. 1.46

Изменение скорости тела может происходить очень быстро (движение пули в канале ствола при выстреле из винтовки) и сравнительно медленно (движение поезда при его отправлении от вокзала). **Величину, характеризующую быстроту изменения скорости, называют ускорением.**

Ускорение — важнейшая физическая величина. **Наш мир таков, что действия одних тел на другие определяют не скорости тел, а быстроту изменения скоростей, т. е. ускорения.** Об этом подробнее будет сказано при изучении динамики. Пока же дадим точное определение физической величины, называемой ускорением точки.

После того как много внимания было уделено определению вектора скорости, вам уже проще будет понять, что такое ускорение.

Вектор средней скорости равен отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ (изменения радиуса-вектора $\vec{r}$) к интервалу времени Δt, за который это перемещение произошло, а вектор среднего ускорения равен отношению вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt, за который произошло изменение скорости.

Поясним определение среднего ускорения. Пусть точка движется по криволинейной траектории (рис. 1.46, *а*). За промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ она перейдёт из положения A_1 в положение A_2. При этом её скорость изменится. Обозначим начальную и конечную скорости через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Изменение скорости за время Δt равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. На рисунке 1.46, *б* проведено геометрическое вычитание векторов скоростей и построен вектор $\Delta\vec{v}$.

Среднее ускорение за время Δt равно

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Вектор $\vec{a}_{ср}$ имеет одинаковое направление с вектором $\Delta\vec{v}$.

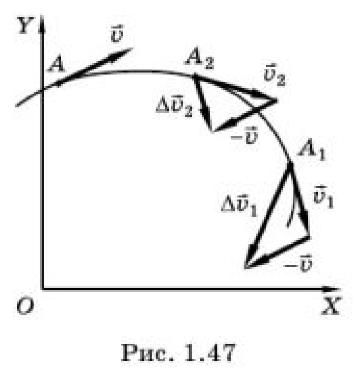


Рис. 1.47

Подобно тому как вектор средней скорости играет преимущественно вспомогательную роль, среднее ускорение также не является основным понятием. Нужно уметь определять ускорение в каждой точке траектории. Это ускорение называется мгновенным. Именно мгновенное ускорение, как вы увидите впоследствии, определяется действием на данное тело окружающих тел.

На разных участках траектории за одинаковые промежутки времени Δt изменение скорости $\Delta\vec{v}$ может быть различным как по модулю, так и по направлению.

При уменьшении интервала времени Δt изменения скорости $\Delta\vec{v}$ уменьшаются по модулю и меняются по направлению (рис. 1.47). Соответственно средние ускорения $\frac{\Delta v_1}{\Delta t}$, $\frac{\Delta v_2}{\Delta t}$, $\frac{\Delta v_3}{\Delta t}$, ... также меняются по модулю и по направлению. Но по мере приближения интервала Δt к нулю отношение $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ стремится к определённому предельному значению. Это предельное значение и есть мгновенное ускорение, или просто ускорение точки.

Ускорением называется предел отношения изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло, если интервал времени Δt стремится к нулю:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},} \qquad (1.15.1)$$

или

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t).$$

Здесь сходство с нашими рассуждениями о скорости налицо. Ускорение тоже скорость, но скорость изменения скорости.

В отличие от скорости, знание траектории движения точки не позволяет определить направление ускорения. В то время как скорость направлена по касательной к траектории, направление ускорения совпадает с направлением из-

менения скорости $\Delta\vec{v}$ за малый интервал времени. Изменение же скорости только при прямолинейном движении совпадает с направлением самой скорости или противоположно ему. Поэтому ускорение может быть направлено под различными углами по отношению к траектории. Но оно всегда направлено «внутрь» траектории. Попробуйте в этом убедиться сами с помощью рисунка 1.47.

Векторное уравнение (1.15.1) при движении на плоскости эквивалентно двум уравнениям для проекций вектора $\vec{a}$ на координатные оси[1]:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t},\ a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}, \qquad (1.15.2)$$

или

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Измерение ускорения в данной точке путём нахождения изменения скорости при переходе тела в близкую точку — задача весьма трудная. Ускорение обычно измеряют не прямо, а косвенно, используя законы динамики.

У многих из вас может возникнуть вопрос. Ускорение тоже может изменяться. Не следует ли ввести величину, характеризующую быстроту изменения ускорения?

Конечно, такую величину ввести можно, но в этом нет необходимости. Дело в том, что взаимодействие тел в нашем мире определяет быстроту изменения скорости, а не быстроту изменения ускорения. Поэтому знать ускорение нам необходимо, чтобы вычислять скорость и координаты тела, а знание быстроты изменения ускорения ничего нового нам не даст.

Мы ввели новую физическую величину, характеризующую быстроту изменения скорости, — ускорение. Эта величина позволит нам изучить ещё одно достаточно простое движение.

? 1. Точка движется по криволинейной траектории с постоянной по модулю скоростью. Имеет ли точка ускорение?

2. Может ли тело иметь ускорение, если его скорость в данный момент времени равна нулю?

---

[1] Можно было бы сначала рассмотреть ускорение при прямолинейном движении, как мы это делали, вводя понятие скорости, но теперь, когда понятие вектора введено, в таком более детальном изложении нет необходимости.

§ 1.16. ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Изучая различные движения, можно выделить один сравнительно простой и распространённый вид движения — движение с постоянным ускорением. Дадим определение и точное описание этого движения. Впервые движение с постоянным ускорением открыл Галилей.

Простой случай неравномерного движения — это движение с постоянным ускорением, при котором модуль и направление ускорения не меняются со временем. Оно может быть прямолинейным и криволинейным. Приблизительно с постоянным ускорением движется автобус или поезд при отправлении в путь или при торможении, скользящая по льду шайба и т. д. Все тела под влиянием притяжения к Земле падают вблизи её поверхности с постоянным ускорением, если сопротивлением воздуха можно пренебречь. Об этом пойдёт речь в дальнейшем. Мы будем изучать в основном именно движение с постоянным ускорением.

При движении с постоянным ускорением вектор скорости за любые равные интервалы времени изменяется одинаково. Если уменьшить интервал времени в два раза, то и модуль вектора изменения скорости также уменьшится в два раза. Ведь за первую половину интервала скорость изменяется точно так же, как и за вторую. При этом направление вектора изменения скорости остаётся неизменным. Отношение изменения скорости к интервалу времени будет одним и тем же для любого промежутка времени. Поэтому выражение для ускорения можно записать так:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}. \qquad (1.16.1)$$

Поясним сказанное рисунком. Пусть траектория криволинейна, ускорение постоянно и направлено вниз. Тогда и векторы изменения скорости за равные интервалы времени, например за каждую секунду, будут направлены вниз. Найдём изменения скорости за последовательные интервалы времени, равные 1 с. Для этого отложим из одной точки A скорости $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и т. д., которые приобретает тело через 1 с, и произведём вычитания начальной скорости из конечной. Так как $\vec{a} = \text{const}$, то все векторы приращения скорости за каждую секунду лежат на одной вертикали и име-

ют одинаковые модули (рис. 1.48), т. е. модуль вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$ возрастает равномерно.

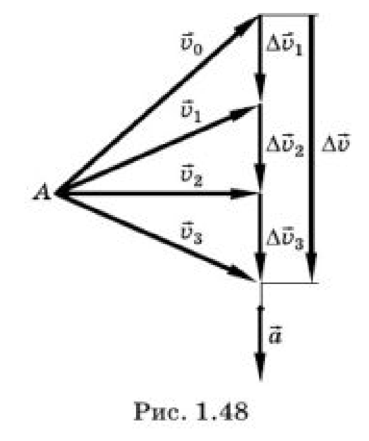


Рис. 1.48

Если ускорение постоянно, то его можно понимать как изменение скорости в единицу времени. Это позволяет установить единицы для модуля ускорения и его проекций. Запишем выражение для модуля ускорения:

$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}.$$



Отсюда следует, что

$$\text{единица ускорения} = \frac{\text{единица скорости}}{\text{единица времени}}.$$

Следовательно, за единицу ускорения принимается постоянное ускорение движения тела (точки), при котором за единицу времени модуль скорости изменяется на единицу скорости:

$$\text{единица ускорения} = \frac{1\ \text{м/с}}{1\ \text{с}} = 1\ \text{м/с}^2,$$

или

$$\text{единица ускорения} = \frac{1\ \text{см/с}}{1\ \text{с}} = 1\ \text{см/с}^2.$$

Эти единицы ускорения читаются так: один метр на секунду в квадрате и один сантиметр на секунду в квадрате.

Единица ускорения 1 м/с^2 — это такое постоянное ускорение, при котором модуль изменения скорости за каждую секунду равен 1 м/с.

Если ускорение точки непостоянно и в какое-либо мгновение становится равным 1 м/с^2, то это не означает, что за секунду модуль приращения скорости равен 1 м/с. В данном случае значение 1 м/с^2 надо понимать так: если бы начиная с данного мгновения ускорение стало постоянным, то за каждую секунду модуль изменения скорости был бы равен 1 м/с.

Автомобиль «Жигули» при разгоне с места приобретает ускорение 1,5 м/с^2, а поезд — около 0,7 м/с^2. Падающий на землю камень движется с ускорением 9,8 м/с^2.

Из всевозможных видов неравномерного движения мы выделили наиболее простое — движение с постоянным

ускорением. Однако не существует движения со строго постоянным ускорением, как и не существует движения со строго постоянной скоростью. Всё это простейшие модели реальных движений.

? **1.** Точка движется по криволинейной траектории с ускорением, модуль которого постоянен и равен 2 м/с². Означает ли это, что за 1 с модуль скорости точки изменяется на 2 м/с?

2. Точка движется с переменным ускорением, модуль которого в некоторый момент времени равен 3 м/с². Как истолковать это значение ускорения движущейся точки?

§ 1.17. СКОРОСТЬ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Выясним, как зависит скорость от времени, если ускорение постоянно.

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ скорость точки равнялась $\vec{v}_0$ (начальная скорость). Тогда, обозначив скорость в произвольный момент времени через $\vec{v}$, получим в соответствии с формулой (1.16.1)

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \qquad (1.17.1)$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.} \qquad (1.17.2)$$

Векторному уравнению (1.17.2) соответствуют три уравнения для проекций вектора скорости на оси координат. Ниже мы покажем, что движение с постоянным ускорением совершается в одной плоскости. Поэтому целесообразно совмещать систему координат XOY с этой плоскостью. Тогда формуле (1.17.2) будут соответствовать две формулы для проекций вектора скорости на координатные оси:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t. \end{aligned} \qquad (1.17.3)$$

Для определения скорости в произвольный момент времени надо знать начальную скорость $\vec{v}_0$ и ускорение $\vec{a}$.

Начальная скорость не зависит от того, какие тела действуют на данное тело в рассматриваемый момент времени. Она определяется тем, что происходило с телом в предшествующие моменты времени. Например, начальная скорость падающего камня зависит от того, просто ли мы выпустили его из рук или же он попал в данную точку, описав предварительно ту или иную траекторию. Ускорение же, наоборот, не зависит от того, что происходило с телом в предыдущее время, а лишь от действий на него других тел в данный момент. Подробно об этом будет рассказано в следующей главе.

Формулы (1.17.2) и (1.17.3) справедливы как для прямолинейного, так и для криволинейного движения.

Движение с постоянным ускорением совершается в одной плоскости

Для доказательства данного утверждения воспользуемся формулой скорости $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. Пусть ускорение $\vec{a}$ образует с начальной скоростью $\vec{v}_0$ некоторый угол α (рис. 1.49, *а*). Из курса математики известно, что два пересекающихся вектора лежат в одной плоскости. Вектор $\vec{a}t$ имеет то же направление, что и $\vec{a}$, так как $t > 0$. Поэтому векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}t$ расположены в той же плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$. Сложив векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}t$ (рис. 1.49, *б*), получим вектор, который в любой момент времени t будет расположен в плоскости, в которой находятся векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$.

При движении с постоянным ускорением скорость точки и её проекции меняются со временем по линейному закону.

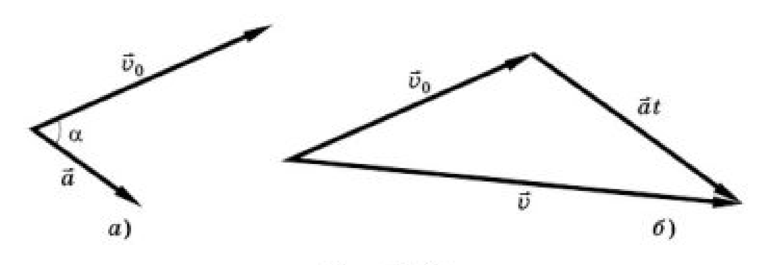


Рис. 1.49

? Докажите, что движение тела с постоянным ускорением совершается в одной плоскости. Какие математические знания вам понадобились при доказательстве?

§ 1.18. ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯ И ПРОЕКЦИИ УСКОРЕНИЯ И МОДУЛЯ И ПРОЕКЦИИ СКОРОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Графики дают возможность представить зависимость скорости и ускорения от времени при движении тела (точки) наглядно.

Графики модуля и проекции ускорения

Если точка движется с постоянным ускорением, то графики модуля и проекции ускорения будут прямыми, параллельными оси времени. Надо помнить, что модуль — неотрицательная величина, поэтому график модуля ускорения не может быть расположен ниже оси времени (рис. 1.50). Проекции ускорения могут иметь положительные и отрицательные значения (рис. 1.51, *а*, *б*). Рисунок 1.51, *б* показывает, что ускорение постоянно и направлено противоположно оси X.

По графику проекции ускорения можно найти, кроме a_x, изменение проекции скорости. Оно численно равно площади прямоугольника $OABC$ или $OKMN$, так как $\Delta v_x = a_x t$, а $a_x t$ численно равно площади прямоугольника $OABC$ или $OKMN$.

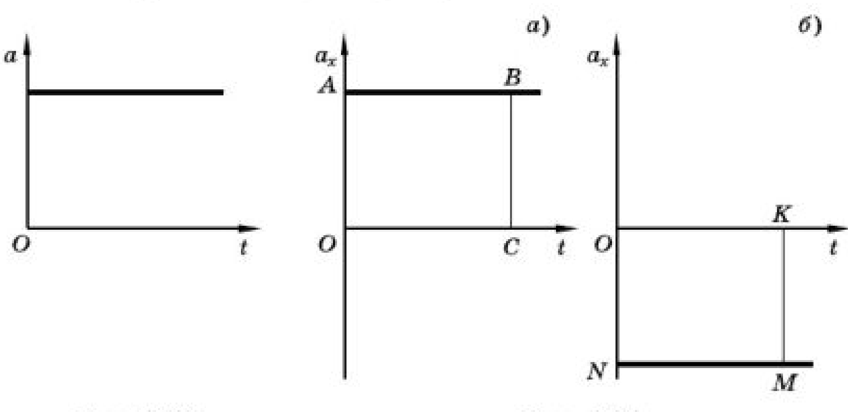


Рис. 1.50 Рис. 1.51

Площадь берётся со знаком «минус», если она расположена ниже оси времени, что соответствует рисунку 1.51, *б*, где $\Delta v_x = a_x t < 0$.

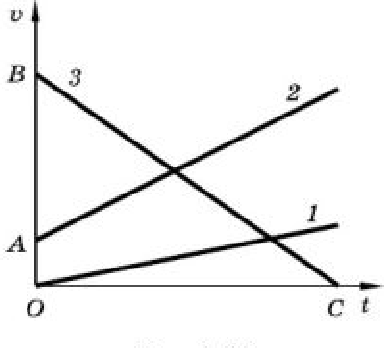


Рис. 1.52

График модуля скорости

Формулы проекций скорости (1.17.3) являются линейными функциями времени. Поэтому графики модуля и проекций скорости представляют собой прямые линии. На рисунке 1.52 представлены графики зависимости модуля скорости от времени для трёх движений с постоянным ускорением. Графики *2* и *3* соответствуют движениям, модули начальных скоростей которых соответствуют отрезкам OA и OB. График *1* соответствует движению с равномерно возрастающим модулем скорости и начальной скоростью, равной нулю. График *3* соответствует движению с модулем скорости, равномерно убывающим до нуля. Отрезок OC численно равен времени движения точки до остановки.

График проекции скорости

Графики модуля скорости содержат меньше информации, чем графики проекции скорости, так как по первым графикам нельзя судить о направлении движения относительно координатных осей.

На рисунке 1.53 изображены графики *1, 2* проекций скорости двух точек. Обе они имеют начальную скорость, равную нулю. Первая точка движется в положительном направлении оси X, и так как $\Delta v_x > 0$, то $a_{1x} > 0$. Вторая точка движется противоположно оси X, так как $\Delta v_x < 0$, поэтому для этой точки $a_{2x} < 0$.

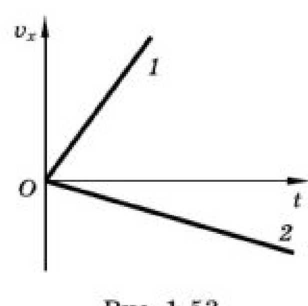


Рис. 1.53

На рисунке 1.54 также изображены графики *1, 2* проекций скорости двух точек. Обе они имеют одно и то же значение проекции начальной скорости, соответствующее отрезку OA. Согласно графику *1* точка движется в положительном направ-

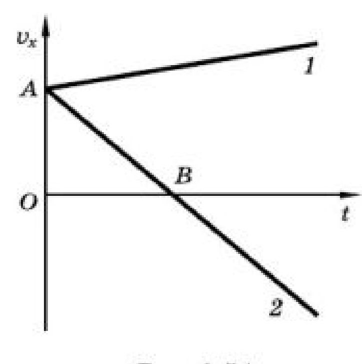


Рис. 1.54

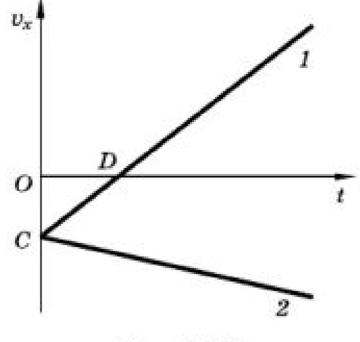


Рис. 1.55

лении оси X, причём модуль и проекция скорости равномерно возрастают.

Согласно графику *2* (см. рис. 1.54) точка в течение некоторого промежутка времени (отрезок OB) движется в положительном направлении оси X ($\upsilon_x > 0$) с равномерно уменьшающимся до нуля (остановка) значением проекции скорости. После этого проекция скорости становится отрицательной; это означает, что точка стала двигаться в направлении, противоположном положительному направлению оси X. При этом проекция скорости по модулю, а значит, и модуль скорости равномерно увеличиваются. Проекция ускорения точки отрицательна. Так как проекция скорости точки равномерно убывает, то проекция ускорения остаётся постоянной. Следовательно, точка движется с постоянным ускорением.

Графики зависимости скорости и ускорения от времени при постоянном ускорении довольно просты. Главное здесь — привыкнуть к изображению положительных и отрицательных величин и не путать графики модулей и проекций.

? 1. Покажите, что угол наклона графика проекции скорости к оси времени тем больше, чем больше модуль проекции ускорения, т. е. проекция ускорения является угловым коэффициентом прямой.
2. На рисунке 1.55 изображены графики *1*, *2* проекций скорости двух точек. Докажите, что графики соответствуют движению с ускорением, не изменяющимся как по модулю, так и по направлению.

3. Как изменяется скорость точки, график проекции скорости которой в зависимости от времени изображён прямой *1* (см. рис. 1.55)? Чему соответствуют отрезки *OC* и *OD*?

4. Как изменялась скорость точки (см. график *2* на рисунке 1.55)? Чему соответствует отрезок *OC*? Куда направлено ускорение точки относительно оси *X*?

§ 1.19. ЗАВИСИМОСТЬ КООРДИНАТ И РАДИУСА-ВЕКТОРА ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Для полного описания движения с постоянным ускорением надо решить последнюю задачу: найти зависимость координат и радиуса-вектора от времени.

Для всех видов движения координаты точки в любой момент времени можно найти по формулам (1.11.3). Запишем выражение для одной из координат движущейся точки: $x = x_0 + \Delta x$. В случае движения с постоянным ускорением изменение координаты сравнительно легко можно определить с помощью графика зависимости проекции скорости от времени.

В § 1.6 мы говорили, что изменение координаты при равномерном прямолинейном движении можно найти по площади прямоугольника под графиком проекции скорости: $\Delta x = \upsilon_x t$. Задача упрощалась тем, что $\upsilon_x = \text{const}$.

При движении с постоянным ускорением проекция скорости не остаётся постоянной, а изменяется в зависимости от времени по линейному закону. На рисунке 1.56 изображён график зависимости υ_x от t для движения с постоянным ускорением, причём $a_x > 0$ и $\upsilon_{0x} > 0$.

Покажем, что в этом случае Δx численно равно площади трапеции *OABC*.

Длина отрезка *OC* численно равна времени t движения тела. Разделим его на n малых одинаковых интервалов Δt. Значения проекций скорости, соответствующих серединам этих промежутков времени, обозначим через υ_{1x}, υ_{2x}, υ_{3x} и т. д. Построим на каждом из отрезков, численно равных промежуткам времени Δt, прямоугольники, высоты которых численно равны проекциям скоростей υ_{1x}, υ_{2x}, υ_{3x} и т. д. Площади этих прямоугольников численно равны изменениям координаты Δx_1, Δx_2, Δx_3, ... за промежутки времени Δt, если

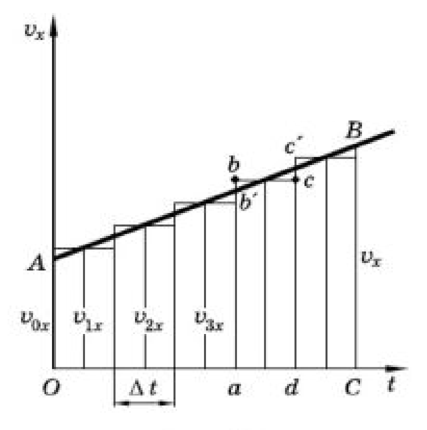


Рис. 1.56

считать, что движение в течение каждого такого промежутка является равномерным.

Нетрудно видеть, что сумма площадей всех прямоугольников равна площади трапеции $OABC$, так как площадь малого прямоугольника $abcd$ равна площади элементарной трапеции $ab'c'd$.

Все прямоугольники образуют ступенчатую фигуру. Переход от одного прямоугольника к другому происходит скачкообразно, так как мы заменили истинное движение суммой равномерных движений за малые интервалы времени Δt. Чтобы это движение совпало с истинным, необходимо уменьшать промежутки времени Δt. Тогда различие между проекциями скорости ab и dc' в начале и конце отрезка времени Δt будет всё меньше и меньше, и в пределе, когда $\Delta t \to 0$, ступенчатое движение не будет отличаться от истинного. Таким образом, и площадь S трапеции $OABC$ численно станет равной изменению координаты Δx за время t.

Из курса математики известно, что площадь S трапеции определяется по формуле

$$S_{OABC} = \frac{OA + BC}{2} \cdot OC.$$

Длины оснований OA и BC этой трапеции численно равны проекциям v_{0x} и v_x начальной и конечной скоростей, а длина высоты OC — времени движения t точки. Следовательно,

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \qquad (1.19.1)$$

Учитывая, что

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

получим

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Мы вывели эту формулу для случая, когда $v_{0x} > 0$ и $a_x > 0$. Можно показать, что она справедлива и тогда, когда одна из этих величин или обе они отрицательны. Желающих приглашаем это сделать.

Проекцию перемещения на ось Y можно найти точно таким же способом.

Нам известно, что движение с постоянным ускорением происходит в одной плоскости, в которой расположены векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$. Если через эти векторы провести координатную плоскость XOY, то для полного описания движения будет достаточно двух формул для зависимости координат от времени: $x(t)$ и $y(t)$.

Подставляя найденные значения изменения координат в формулы (1.11.3), получим выражения для координат при движении с постоянным ускорением как функции времени:

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$
$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (1.19.2)$$

Эти формулы применимы для описания как прямолинейного движения (в этом случае целесообразно ось X направить по прямой, вдоль которой движется точка), так и криволинейного. Важно лишь, чтобы ускорение было постоянным.

Двум уравнениям (1.19.2) соответствует одно векторное уравнение:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}.} \quad (1.19.3)$$

Обратите внимание на то, что при помощи уравнений (1.19.2) или (1.19.3) мы можем найти только положение движущейся точки в любой момент времени, но не пройденный точкой путь. При прямолинейном движении с постоянным ускорением возможно изменение направления скорости на противоположное (например, при движении брошенного вверх тела). В таком случае надо определить, в какой точке

траектории произошло изменение направления скорости. Путь находится суммированием длин отрезков траектории, пройденных телом за указанное время.

В принципе формулы (1.17.2) *и* (1.19.3) *позволяют решить любую задачу на движение точки с постоянным ускорением.*

? Запишите уравнение для перемещения точки, движущейся прямолинейно с постоянным ускорением.

§ 1.20. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Среди разнообразных движений с постоянным ускорением наиболее простым является прямолинейное движение. Если при этом модуль скорости возрастает, то движение иногда называют равноускоренным, а при уменьшении модуля скорости — равнозамедленным. Подобного рода движения совершает поезд, отходящий от станции или приближающийся к ней. Равноускоренно движется камень, брошенный вертикально вниз, а равнозамедленно — камень, брошенный вертикально вверх.

Для описания прямолинейного движения с постоянным ускорением можно обойтись одной осью координат (например, осью X), которую целесообразно направить вдоль траектории движения. В этом случае любая задача решается с помощью двух уравнений:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t \qquad (1.20.1)$$

и

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.20.2)$$

Проекция перемещения и путь при прямолинейном движении с постоянным ускорением

Проекцию на ось X перемещения, равную $\Delta x = x - x_0$, найдём из уравнения (1.20.2):

$$\Delta x = \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.20.3)$$

Если скорость тела (точки) не меняет своего направления, то путь равен модулю проекции перемещения:

$$s = |\Delta x| = \left| \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \right|. \qquad (1.20.4)$$

Если же скорость меняет своё направление, то путь вычисляется сложнее. В этом случае он складывается из модуля перемещения до момента изменения направления скорости и модуля перемещения после этого момента.

Средняя скорость при прямолинейном движении с постоянным ускорением

Из формулы (1.19.1) следует, что

$$\frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2} = \frac{\Delta x}{t}.$$

Но $\frac{\Delta x}{t}$ — это проекция средней скорости на ось X (см. § 1.12), т. е. $\frac{\Delta x}{t} = \bar{\upsilon}_x$. Следовательно, при прямолинейном движении с постоянным ускорением проекция средней скорости на ось X равна

$$\bar{\upsilon}_x = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2}. \qquad (1.20.5)$$

Можно доказать, что если какая-нибудь другая физическая величина находится в линейной зависимости от времени, то среднее по времени значение этой величины равно полусумме её наименьшего и наибольшего значений в течение данного промежутка времени.

Если при прямолинейном движении с постоянным ускорением направление скорости не меняется, то средний модуль скорости равен полусумме модулей начальной и конечной скоростей, т. е.

$$\bar{\upsilon} = |\bar{\upsilon}_x| = \frac{|\upsilon_{0x} + \upsilon_x|}{2} = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2}. \qquad (1.20.6)$$

Связь между проекциями начальной и конечной скоростей, ускорения и перемещения

Согласно формуле (1.19.1),

$$\Delta x = \frac{\upsilon_{0x} + \upsilon_x}{2} t. \qquad (1.20.7)$$

Время t выразим из формулы (1.20.1):

$$t = \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{a_x}$$

и подставим в (1.20.7). Получим

$$\Delta x = \frac{\upsilon_x + \upsilon_{0x}}{2} \; \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{a_x} = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}.$$

Отсюда

$$\upsilon_x^2 = \upsilon_{0x}^2 + 2a_x\Delta x. \qquad (1.20.8)$$

Полезно запомнить формулу (1.20.8) *и выражение* (1.20.6) *для средней скорости. Эти формулы могут понадобиться для решения многих задач.*

? **1.** Как направлено ускорение при отправлении поезда от станции (разгон); при подходе к станции (торможение)?

2. Начертите график пути при разгоне и при торможении.

3. Докажите самостоятельно, что при равноускоренном прямолинейном движении без начальной скорости пути, проходимые телом за равные последовательные промежутки времени, пропорциональны последовательным нечётным числам:

$$s_1 : s_2 : s_3 : \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots .$$

Впервые это было доказано Галилеем.

§ 1.21. ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТИ КООРДИНАТ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Графики зависимости координат от времени сложнее графиков скорости и ускорения. Им нужно уделить большое внимание.

Выражения для координат (1.19.2) представляют собой квадратичные функции времени, если в этих уравнениях $a_x \neq 0$ и $a_y \neq 0$. Поэтому их графиками являются параболы (или части парабол).

Рассмотрим прямолинейное движение по наклонному жёлобу. Пусть шар начинает скатываться из состояния покоя ($\upsilon_0 = 0$). Будем рассматривать движение центра шара. Оно, как было установлено ещё Галилеем, является равноускоренным. Выберем начало координат в точке, откуда

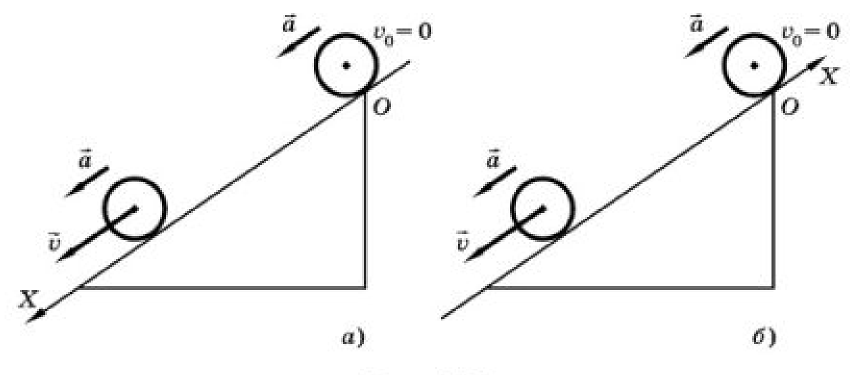


Рис. 1.57

началось движение. Если ось X направить вниз вдоль жёлоба (рис. 1.57, *а*), то координаты центра шара при движении будут положительными. При этом $v_x > 0$ и $a_x > 0$, так как $\vec{v}$ и $\vec{a}$ имеют такое же направление, что и ось X. Графиком $x(t)$ служит парабола OA (рис. 1.58) с вершиной в точке O.

Если же ось X направить вдоль жёлоба вверх (рис. 1.57, *б*), $a_x < 0$, $v_x < 0$ и координата центра шара $x < 0$. Графиком будет парабола OB с вершиной в точке O (см. рис. 1.58).

Оба случая движения описываются уравнением $x = \frac{a_x t^2}{2}$. Теперь рассмотрим скатывание шаров, соответствующее рисунку 1.59, *а*, *б*. Здесь $v_0 = 0$, поэтому зависимость координаты от времени имеет вид $x = x_0 + \frac{a_x t^2}{2}$. Движению с $x_{01} > 0$ соответствует парабола DC (рис. 1.60). При движении, изображённом на рисунке 1.59, *б*, $x_{02} < 0$. Это движение графически описывается параболой EK (см. рис. 1.60). Оба движения являются равноускоренными.

Если ось X направить вверх по жёлобу (рис. 1.61, *а*, *б*), то движениям шара соответствуют графики *1* и *2* (рис. 1.62).

Обратите внимание на следующую особенность всех графиков (см. рис. 1.58, 1.60, 1.62): они начинаются вершинами парабол ($v_0 = 0$), а далее идут всё круче и круче, так как скорость возрастает

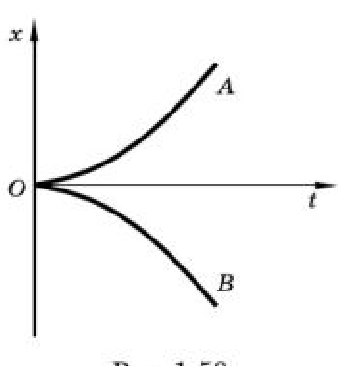


Рис. 1.58

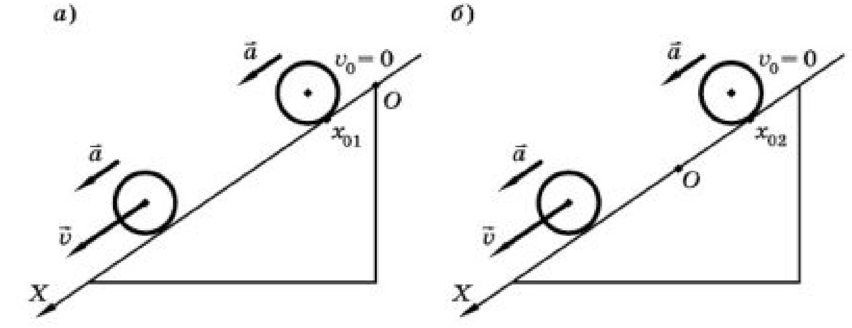


Рис. 1.59

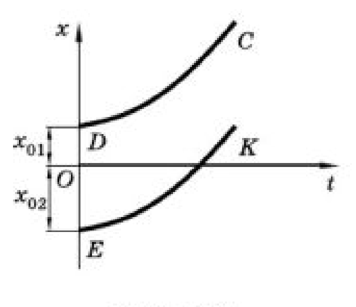


Рис. 1.60

и за равные промежутки времени координата точки изменяется всё быстрее и быстрее.

Графики равнозамедленного движения изображаются аналогично. В этом случае тело имеет начальную скорость, направленную вверх вдоль жёлоба. Такое движение продолжится до остановки ($\upsilon = 0$). (После остановки шар начнёт скатываться вниз и его движение станет равноускоренным.) Так как модуль скорости уменьшается, то $\vec{a}$ направлено противоположно $\vec{\upsilon}_0$, т. е. вниз вдоль жёлоба.

Можно рассмотреть все случаи равнозамедленного движения в зависимости от выбора направления

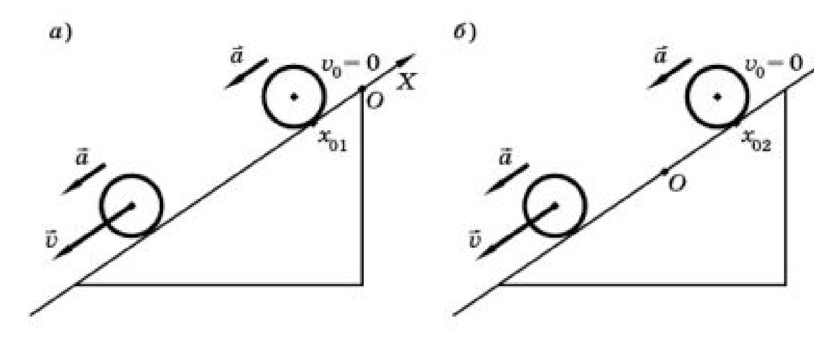


Рис. 1.61

оси X и значения начальной координаты x_0. Так, движениям, изображённым на рисунке 1.63, *а*, *б*, соответствуют графики на рисунке 1.64, *а*, *б*.

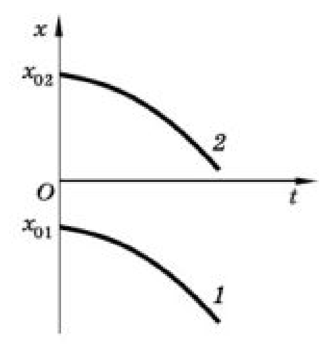


Рис. 1.62

Если мы будем рассматривать дальнейшие движения шаров после остановки, то получим полные графики их движения, которые изображены на рисунке 1.65, *а*, *б*. Действительно, шар имел начальную скорость, направленную вверх по жёлобу. Сначала он поднимается равнозамедленно, а потом начинает скатываться равноускоренно. Его координата (см. рис. 1.63, *а*) уменьшается по модулю до нуля, затем становится положительной, а далее

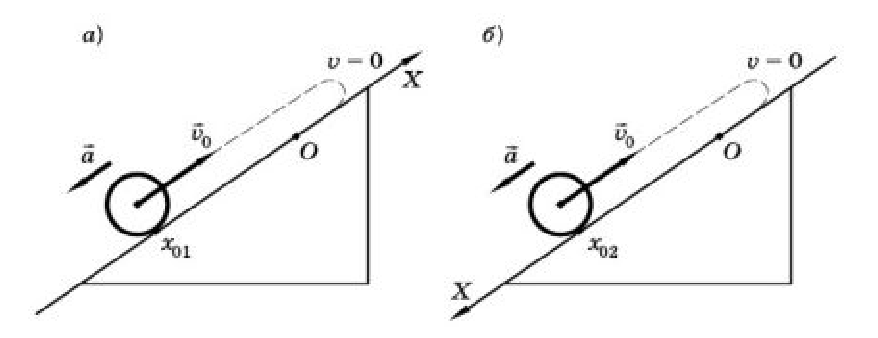
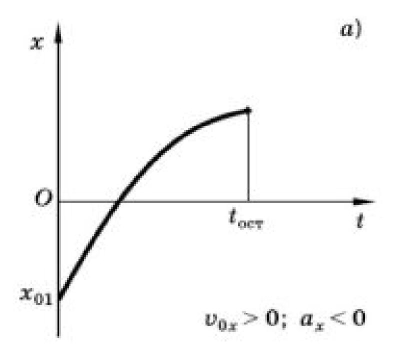


Рис. 1.63



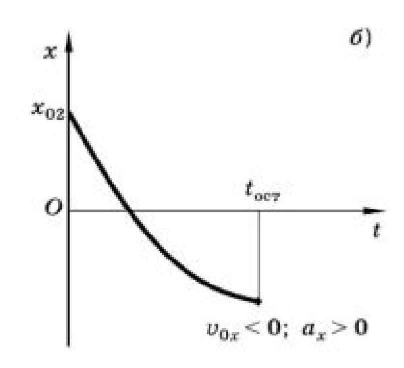


Рис. 1.64

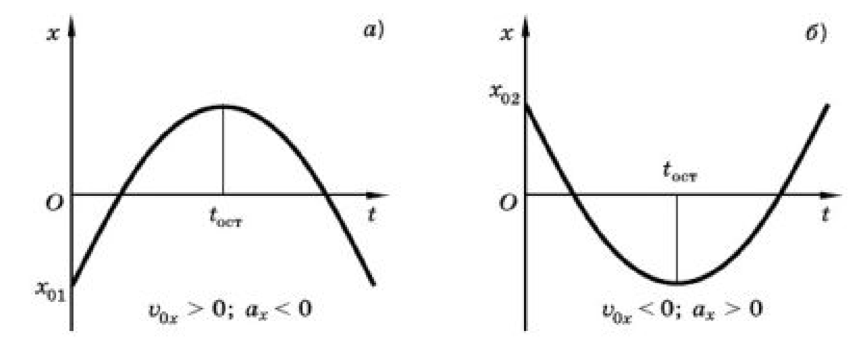


Рис. 1.65

вновь будет уменьшаться до нуля, после чего начинает принимать отрицательные значения (график изображён на рисунке 1.65, *а*). Для случая, соответствующего рисунку 1.63, *б*, имеем следующее: координата шара сначала уменьшается до нуля, затем принимает отрицательные значения, а потом (после остановки) начинает возрастать. График для этого движения изображён на рисунке 1.65, *б*.

Построение графиков зависимости координаты от времени при $\vec{a} = \text{const}$ *сводится к построению отрезков парабол. Для лучшего усвоения этих графиков полезно повторить соответствующий раздел курса математики.*

? Проклассифицируйте графики зависимости координат от времени при движении с постоянным ускорением ($a > 0$; $a = 0$; $a < 0$). Результат представьте в виде таблицы с конкретными изображениями графиков.

§ 1.22. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Большинство задач на движение тел с постоянным ускорением решается в основном так же, как и задачи на равномерное прямолинейное движение (см. § 1.9). Однако вместо одного уравнения зависимости координаты от времени теперь будет два: для координаты и для проекции скорости в зависимости от времени:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \qquad (1.22.1)$$

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t.$$

Задача 1

Конькобежец, разогнавшись до скорости $\upsilon_0 = 6$ м/с, начал скользить равнозамедленно. Спустя время $t = 30$ с модуль скорости конькобежца, движущегося прямолинейно, стал равен $\upsilon = 3$ м/с. Найдите ускорение конькобежца, считая его постоянным.

Решение. Совместим ось X с траекторией конькобежца. За положительное направление оси выберем направление вектора начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 1.66). Так как конькобежец движется с постоянным ускорением, то $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$. Отсюда $a_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{t}$, где $\upsilon_x = \upsilon$ и $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, так как векторы $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\upsilon}$ имеют такое же направление, что и ось X. Следовательно, $a_x = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$, $a_x = -0{,}1$ м/с^2 и $a = 0{,}1$ м/с^2. Знак «минус» указывает, что ускорение направлено противоположно оси X.

Задача 2

Бруску на гладкой наклонной плоскости сообщили начальную скорость $\upsilon_0 = 0{,}4$ м/с, направленную вверх. Брусок движется прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого $a = 0{,}2$ м/с^2. Найдите скорости бруска в моменты времени, равные 1, 2, 3 с от начала движения. Определите положение бруска в эти моменты времени относительно той точки, где брусок имел скорость υ_0. Чему равен путь, пройденный бруском за 3 с?

Решение. Ускорение бруска направлено вниз вдоль плоскости как при его подъёме, так и при спуске.

Совместим координатную ось с траекторией движения. За положительное направление оси X примем направление вектора начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$. Начало координат выберем в той точке траектории, где брусок имел скорость $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 1.67).

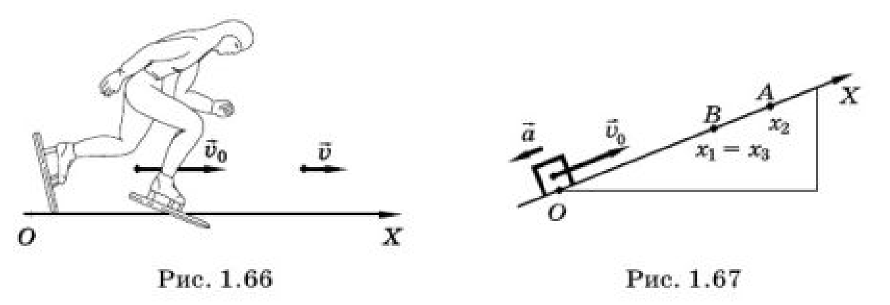


Рис. 1.66

Рис. 1.67

Брусок движется с постоянным ускорением, поэтому $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$. Так как $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, $a_x = -a$, то $\upsilon_x = \upsilon_0 - at$. Эта формула справедлива для любого момента времени.

Найдём проекции и модули скоростей в указанные моменты времени:

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_0 - at_1 = 0{,}2 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_1 = |\upsilon_{1x}| = 0{,}2 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_{2x} = \upsilon_0 - at_2 = 0, \qquad \upsilon_2 = 0;$$

$$\upsilon_{3x} = \upsilon_0 - at_3 = -0{,}2 \text{ м/с}, \qquad \upsilon_3 = |\upsilon_{3x}| = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

Так как $\upsilon_{1x} > 0$, то скорость $\vec{\upsilon}_1$ направлена в ту же сторону, что и ось X. Знак «минус» у проекции υ_{3x} указывает на то, что скорость $\vec{\upsilon}_3$ направлена в сторону, противоположную оси X. Так и должно быть, ведь после остановки ($\upsilon_2 = 0$) брусок начнёт скользить вниз по плоскости.

Найдём положение бруска для заданных моментов времени:

$$x_1 = \upsilon_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = 0{,}4 \text{ м} - \frac{0{,}2 \text{ м}}{2} = 0{,}3 \text{ м},$$

$$x_2 = \upsilon_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2} = 0{,}8 \text{ м} - 0{,}4 \text{ м} = 0{,}4 \text{ м},$$

$$x_3 = \upsilon_0 t_3 - \frac{at_3^2}{2} = 1{,}2 \text{ м} - 0{,}9 \text{ м} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Обратите внимание на то, что в точке B с координатой 0,3 м ($x_1 = x_3$) (см. рис. 1.67) тело было дважды (при подъёме и спуске). В эти же моменты времени тело имело скорости, равные по модулю ($\upsilon_1 = \upsilon_3$), но противоположные по направлению: $\vec{\upsilon}_1 = -\vec{\upsilon}_3$.

В точке A с координатой x_2 (см. рис. 1.67) скорость $\upsilon_2 = 0$. Здесь произошло изменение направления скорости. В момент времени $t_3 = 3$ с брусок находился в точке B с координатой x_3. Следовательно, пройденный бруском путь

$$s = OA + AB = 2x_2 - x_3 = 0{,}5 \text{ м}.$$

Задача 3

На рисунке 1.68, *а* изображён график зависимости проекции скорости точки от времени. Постройте график зависимости координаты от времени, если начальная координата $x_0 = 5$ м. Постройте график зависимости пути от времени.

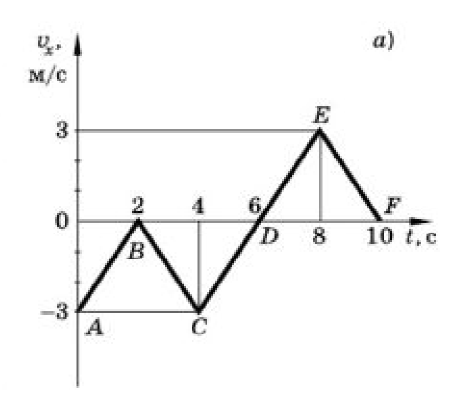
Решение. Сначала построим график зависимости координаты от времени. Первые 2 с точка двигалась равнозамедленно противоположно оси X ($\upsilon_{1x} < 0$). Изменение координаты Δx_1 численно равно площади треугольника OAB. Поэтому координата к концу 2-й секунды равна: $x_1 = x_0 + \Delta x_1 = 5$ м $- 3$ м $= 2$ м. Графиком координаты на этом интервале времени является отрезок параболы A_1B_1 (рис. 1.68, *б*). Точка B_1 — вершина этой параболы.

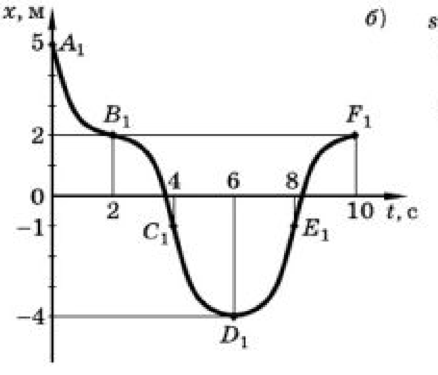
В следующие 2 с движение было равноускоренным в том же направлении, что и вначале ($\upsilon_{2x} < 0$). Координата к концу 4-й секунды равна $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 2$ м $- 3$ м $= -1$ м. График — парабола B_1C_1.

От 4 до 6 с точка вновь двигалась равнозамедленно в прежнем направлении, поэтому $x_3 = x_2 + \Delta x_3 = -1$ м $- 3$ м $= -4$ м. График — парабола C_1D_1, где D_1 — её вершина.

От 6 до 8 с точка двигалась равноускоренно в положительном направлении оси X ($\upsilon_{4x} > 0$). График — парабола D_1E_1. К концу 8-й секунды координата $x_4 = -4$ м $+ 3$ м $= -1$ м. Далее точка двигалась равнозамедленно в том же направлении ($\upsilon_{5x} > 0$): $x_5 = -1$ м $+ 3$ м $= 2$ м. График — парабола E_1F_1.

При построении графика пути необходимо учесть, что





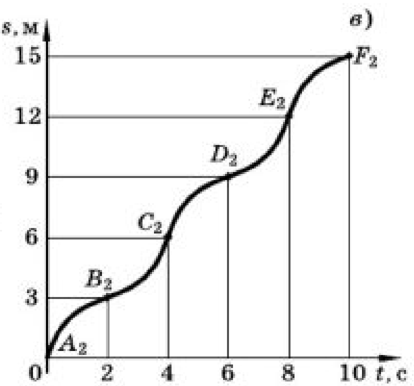


Рис. 1.68

путь — неотрицательная величина и не может уменьшаться в процессе движения.

График состоит из отрезков парабол A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2E_2, E_2F_2 (рис. 1.68, *в*).

Упражнение 3

1. Небольшому кубику на гладкой наклонной плоскости сообщили начальную скорость $v_0 = 8$ м/с, направленную вверх. Кубик движется прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого $a = 2$ м/с^2. Найдите положение кубика относительно той точки плоскости, где кубику сообщена скорость $\vec{v}_0$, в моменты времени 2, 4, 6 с от начала движения, а также скорость кубика в те же моменты времени. Чему равен путь, пройденный кубиком за 5 с?

2. Два велосипедиста едут навстречу друг другу. Один из них с начальной скоростью 18 км/ч поднимается в гору равнозамедленно с постоянным ускорением, модуль которого 20 см/с^2. Другой велосипедист с начальной скоростью 5,4 км/ч спускается с горы с таким же по модулю ускорением. Через какое время они встретятся? На каком расстоянии от подножия горы произойдёт встреча и какой путь пройдёт каждый из них к этому моменту? Расстояние между велосипедистами в начальный момент времени было 195 м.

3. На рисунке 1.69 изображены графики I, II и III проекций скорости трёх тел, движущихся прямолинейно. Охарактеризуйте особенности движения тел. Чему соответствует точка A пересечения графиков? Найдите модули ускорений тел. Запишите формулы для вычисления проекций скорости каждого тела.

4. Расстояние 20 км между двумя станциями поезд проходит со скоростью, средний модуль которой равен 72 км/ч, причём на разгон он тратит 2 мин, а затем идёт с постоянной скоростью. На торможение до полной остановки поезд тратит 3 мин. Определите модуль максимальной скорости поезда.

5. Санки, скатывающиеся с горы, в первые 3 с проходят 2 м, а в последующие 3 с — 4 м. Считая движение равноускоренным, найдите модуль ускорения и модуль начальной скорости санок.

6. Тело, движущееся равноускоренно с начальной скоростью 1 м/с, приобретает, пройдя некоторое расстояние,

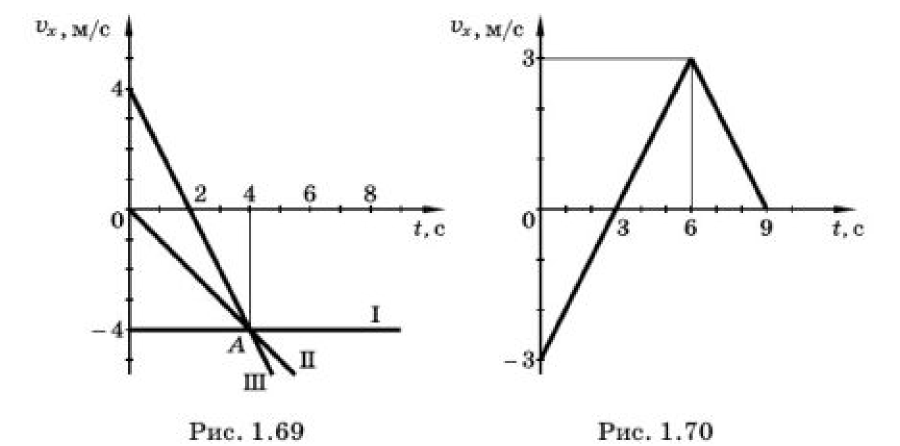


Рис. 1.69

Рис. 1.70

скорость 7 м/с. Какова была скорость тела на середине этого расстояния?

7. По прямой начинает двигаться точка с постоянным ускорением. Спустя время t_1 после начала её движения направление ускорения точки изменяется на противоположное, оставаясь неизменным по модулю. Определите, через какое время t_2 после начала движения точка вернётся в исходное положение.

8. Вагонетка должна перевезти груз в кратчайший срок с одного места на другое, удалённое от первого на расстояние L. Она может увеличивать или уменьшать свою скорость только с одинаковым по модулю ускорением, равным a. Кроме того, она может двигаться с постоянной скоростью. Какой наибольшей по модулю скорости должна достигнуть вагонетка, чтобы было выполнено указанное выше условие?

9. На рисунке 1.70 приведён график зависимости проекции скорости точки, движущейся прямолинейно, от времени. Постройте график зависимости координаты от времени, если x_0 = 4,5 м. Постройте график зависимости пути от времени.

---

1. Изобразите «линейку» ускорений, с которыми могут двигаться различные автомобили.

2. Используя различные информационные ресурсы, выделите сферы жизнедеятельности человека, технологические области, в которых Россия за последние десять лет преуспела

(представьте в виде схемы, рисунка, диаграммы и т. п.). Попробуйте оценить, с каким ускорением произошли изменения в этих областях.

3. Выделите факторы, ускоряющие и/или тормозящие ваше развитие (представьте в виде таблицы).

4. Путь от дома до школы можно осуществлять различными способами: пешком, общественным или личным транспортом. Изобразите графики зависимости модулей скоростей и их проекций при вашем перемещении в каждом из случаев.

5. В психологии известно, что некоторые качества человека (например, способность решать задачи) формируются таким образом, что динамика их развития описывается U-образной кривой (парабола — «ветви вверх»). Попробуйте объяснить этот факт на конкретных примерах.

§ 1.23. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ

Наиболее распространённый вид движения с постоянным ускорением — свободное падение тел.

При падении любого тела на Землю из состояния покоя его скорость увеличивается. Ускорение, сообщаемое телам земным шаром, направлено вертикально вниз. Долгое время считали, что Земля сообщает разным телам различные ускорения. Простые наблюдения как будто подтверждают это. Птичье перо или лист бумаги падают гораздо медленнее, чем камень. Вот почему со времён Аристотеля (греческого учёного, жившего в IV в. до н. э.) считалось незыблемым мнение, что тяжёлые тела падают быстрее, чем лёгкие.

Только Галилею на основе многочисленных опытов удалось прийти к выводу, что сопротивление воздуха искажает картину свободного падения тел, которую можно было бы наблюдать в отсутствие земной атмосферы.

Само понятие ускорения как строго определённой физической величины впервые было введено Галилеем.

Опыты Галилея

Вначале Галилей установил, что свободное падение является равноускоренным движением. Падение тел происходит очень быстро. Поэтому для исследования движения необходимо измерять очень малые промежутки времени. В те вре-

мена это делать не умели. Галилей догадался, что можно как бы замедлить свободное падение, изучая скатывание шаров по наклонному жёлобу. При этом он получил формулу для вычисления пути $s = \frac{at^2}{2}$.

Галилей обнаружил, что шары одинакового диаметра, изготовленные из дерева, золота, слоновой кости, движутся по жёлобу с одинаковыми ускорениями $a = \frac{2s}{t^2}$. Итак, ускорения не зависят от массы шаров!

Далее учёный обнаружил, что с увеличением наклона жёлоба модуль ускорения увеличивается, но остаётся одинаковым для тел различных масс. Свободному падению соответствует движение по вертикально поставленному жёлобу. Следовательно, тела должны падать с одинаковым ускорением, не зависящим от их массы.

Для проверки своего предположения Галилей, по преданию, наблюдал падение со знаменитой наклонной Пизанской башни (рис. 1.71) различных тел (пушечное ядро, мушкетная пуля и т. д.). Все эти тела достигали поверхности Земли практически одновременно. Таким образом, Галилей

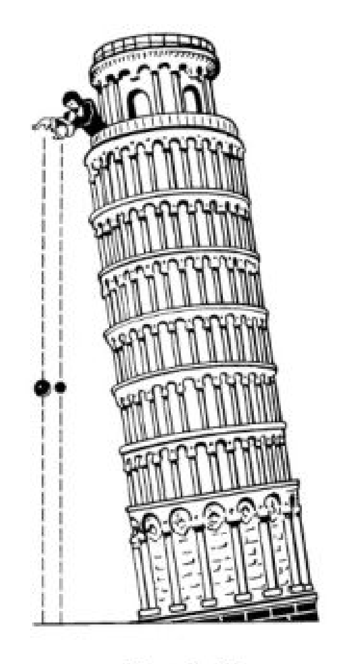


Рис. 1.71

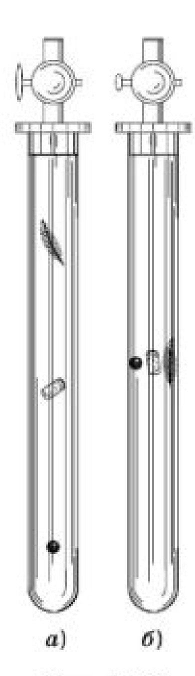


Рис. 1.72

впервые доказал, что земной шар сообщает всем телам вблизи поверхности Земли одно и то же ускорение.

Впоследствии были созданы вакуумные насосы, которые позволили осуществить действительно свободное падение тел.

Свободным падением называется движение тела только под влиянием притяжения к Земле.

Опыт Ньютона



Особенно прост и убедителен опыт с так называемой трубкой Ньютона. В стеклянную трубку помещают различные предметы: дробинки, кусочки пробки, пушинки и т. д. Если теперь перевернуть трубку так, чтобы эти предметы могли падать, то быстрее всего промелькнёт дробинка, за ней кусочки пробки и, наконец, плавно опустится пушинка (рис. 1.72, *а*). Но если выкачать из трубки воздух, то всё произойдёт совершенно иначе: пушинка будет падать, не отставая от дробинки и пробки (рис. 1.72, *б*)! Значит, её движение задерживалось сопротивлением воздуха, которое в меньшей степени сказывалось на движении, например, пробки. Когда же на эти тела действует только притяжение к Земле, то все они падают с одним и тем же ускорением. Конечно, на основании данного опыта ещё нельзя утверждать, что ускорение всех тел под действием притяжения Земли строго одинаково. Но и более точные опыты, проведённые с помощью самой совершенной современной экспериментальной техники, приводят к таким же результатам.

Итак, земной шар сообщает всем без исключения телам одно и то же ускорение. Если сопротивление воздуха отсутствует, то вблизи поверхности Земли ускорение падающего тела постоянно.

Ускорение свободного падения

Ускорение, сообщаемое всем телам земным шаром, называют ускорением свободного падения. Его модуль мы будем обозначать буквой g. Свободное падение не обязательно представляет собой движение вниз. Если начальная скорость направлена вверх, то тело при свободном падении некоторое время будет лететь вверх, уменьшая свою скорость, и лишь затем начнёт падать вниз.

Ускорение свободного падения несколько изменяется в зависимости от географической широты места на поверхности

Земли. (Причины этого будут выяснены дальше.) Но в одном и том же месте оно одинаково для всех тел[1].

На широте Москвы измерения дают следующее значение ускорения свободного падения: g = 9,82 м/с^2. Вообще же на поверхности Земли значение g меняется в пределах от 9,78 м/с^2 на экваторе до 9,83 м/с^2 на полюсе. Впрочем, при решении многих задач можно считать ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли равным 9,8 м/с^2 или даже 10 м/с^2.

При падении тел в воздухе на их движение влияет сопротивление воздуха. Поэтому ускорение тел не равно g. Но когда движутся сравнительно массивные тела с небольшими скоростями (камень, спортивное ядро и т. д.), сопротивление воздуха влияет незначительно и движение тел можно рассматривать как свободное падение. Лишь при больших скоростях (снаряд, пуля и т. д.) сопротивление воздуха существенно и его влиянием нельзя пренебречь.

Свободное падение без начальной скорости

Так как свободное падение совершается с постоянным ускорением, то любую задачу на свободное падение можно решить с помощью формул (1.17.3) и (1.19.2).

Пусть тело свободно падает с высоты h без начальной скорости ($\upsilon_0 = 0$) (рис. 1.73). Тогда $y_0 = h$, $\upsilon_{0y} = 0$, $\upsilon_y = -\upsilon$, $a_y = -g$, и формула $\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_yt$ примет вид

$$\upsilon = gt, \qquad (1.23.1)$$

а формула (1.19.2) запишется так:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения тела на землю $y = 0$, и поэтому высота падения связана со временем падения формулой

$$h = \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.23.2)$$

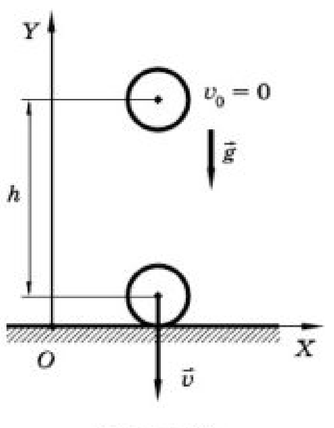


Рис. 1.73

[1] На самом деле g незначительно меняется и в зависимости от высоты над уровнем моря.

Из формул (1.23.1) и (1.23.2) следует

$$\upsilon = \sqrt{2gh}. \qquad (1.23.3)$$

Эта формула выражает зависимость скорости тела от высоты падения.

При свободном падении все тела движутся с одним и тем же постоянным ускорением. Ускорение свободного падения направлено вертикально вниз; его модуль равен $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

? 1. Какие гипотезы проверял Галилей?

2. Тело бросили с поверхности земли вертикально вверх. Во сколько раз время полёта тела (до момента падения на землю) больше времени его подъёма на максимальную высоту? Сопротивление воздуха не учитывайте.

§ 1.24. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту. Такое движение совершают, например, футбольный мяч, артиллерийский снаряд. Если сопротивление воздуха не учитывать, то эти движения представляют собой свободное падение.

Траектория

Пусть тело в начальный момент времени находилось на высоте h и имело скорость $\vec{\upsilon}_0$, направленную под углом α к горизонту (рис. 1.74, *а*).

Ось Y направим вертикально вверх, а ось X — горизонтально так, чтобы векторы начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$ и ускорения свободного падения $\vec{g}$ лежали в плоскости XOY.

Так как тело движется с постоянным ускорением $\vec{g}$, то для описания его движения можно воспользоваться уравнениями (1.17.3) и (1.19.2).

Запишем начальные условия движения тела в соответствии с выбранной системой координат: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Кроме того, $a_x = 0$, $a_y = -g$.

Теперь формулы проекций скорости (1.17.3) и уравнения координат (1.19.2) примут вид

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha, \quad \upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt, \qquad (1.24.1)$$

$$x = \upsilon_0 (\cos\alpha) t, \quad y = h + \upsilon_0 (\sin\alpha) t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.24.2)$$

Найдём уравнение траектории тела. Для этого из уравнений (1.24.2) исключим время. Из первого уравнения получим

$$t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (1.24.2), получим

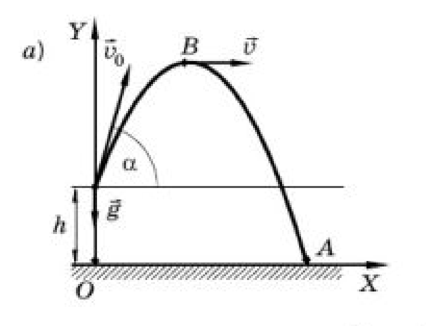
$$y = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha}. \qquad (1.24.3)$$

Из курса математики известно, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. В нашем случае

$$a = -\frac{g}{2\upsilon_0^2 \cos^2\alpha},$$

$$b = \operatorname{tg}\alpha, \; c = h.$$

Таким образом, траекторией тела, брошенного под углом к горизонту, является парабола, проходящая через точку, из которой брошено тело. Ветви параболы направлены вниз, так как коэффициент при x^2 отрицателен. Очевидно, что вершина параболы находится в наивысшей точке подъёма тела (точка B на рисунке 1.74, a).



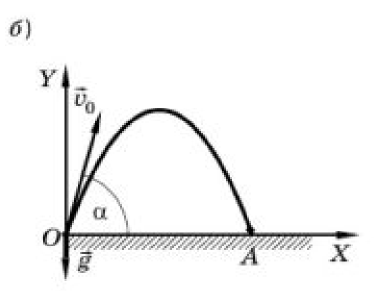


Рис. 1.74

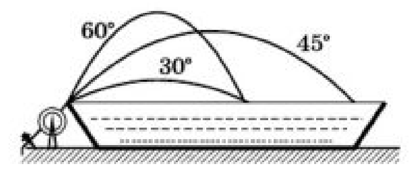


Рис. 1.75

Наблюдать такую траекторию можно с помощью струи воды, вытекающей под напором из трубки (рис. 1.75). Струя принимает форму параболы, так как каждая частица воды движется по параболе, подобно шарику, брошенному под углом к горизонту. В этом легко убедиться, поставив за струями экран с заранее начерченными параболами. При определённой скорости истечения воды струя будет идти вдоль начерченной параболы. Изменив скорость истечения и угол наклона трубки, можно направить струю вдоль другой параболы.

Время подъёма тела и время полёта

Время подъёма нетрудно определить с помощью второго уравнения (1.24.1). В наивысшей точке подъёма вектор скорости $\vec{v}$ параллелен оси X и перпендикулярен оси Y. Следовательно, проекция скорости $\vec{v}$ на ось Y равна нулю ($v_y = 0$), поэтому

$$v_0 \sin\alpha - g t_{\text{под}} = 0.$$

Отсюда

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.24.4)$$

Время полёта тела от точки бросания до точки падения определяется вторым уравнением (1.24.2) для координаты y. В конце полёта $y = 0$. Следовательно,

$$h + v_0 t_{\text{пол}} \sin\alpha - \frac{g t_{\text{пол}}^2}{2} = 0.$$

Отсюда[1]

$$t_{\text{пол}} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}. \qquad (1.24.5)$$

[1] Так как $t_{\text{пол}} > 0$, то второй (отрицательный) корень уравнения надо отбросить.

Если $h = 0$, т. е. тело брошено с поверхности Земли (см. рис. 1.74, *б*), то

$$t_{\text{пол}} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.24.6)$$

Время падения по нисходящей части траектории равно

$$t_{\text{пад}} = t_{\text{пол}} - t_{\text{под}}.$$

При $h = 0$ имеем

$$t_{\text{пад}} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.24.7)$$

Сравнивая формулы (1.24.4), (1.24.6), (1.24.7), заключаем, что время подъёма и время падения при $h = 0$ равны между собой и в 2 раза меньше времени полёта.

Дальность полёта

Найдём горизонтальную дальность полёта, т. е. длину отрезка *OA* (см. рис. 1.74, *б*). Для этого в уравнение (1.24.2) для координаты *x* надо подставить время полёта (1.24.5) или (1.24.6). Если $h = 0$, то дальность полёта равна

$$l = OA = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1.24.8)$$

Очевидно, что при данном модуле υ_0 начальной скорости бросания тела дальность полёта будет наибольшей, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45°$.

Однако при движении тела в воздухе наибольшая дальность полёта достигается при несколько меньшем угле. При стрельбе из орудий нельзя пренебрегать сопротивлением воздуха, так как скорости полёта снарядов велики. При таких скоростях влияние среды на движущееся тело становится особо заметным. Тело движется по несимметричной — баллистической[1] кривой (рис. 1.76), которая в своей нисходя-



Рис. 1.76

[1] От греческого слова ballō — «бросаю». Баллистика — наука о движении снарядов внутри и вне ствола орудия, неуправляемых ракет и т. п.

щей ветви значительно круче параболы. Так, для угла $\alpha = 20°$ при вылете из орудия калибра 76 мм реальная дальность полёта составляет 7200 м вместо 23 600 м при отсутствии сопротивления воздуха (рис. 1.77).

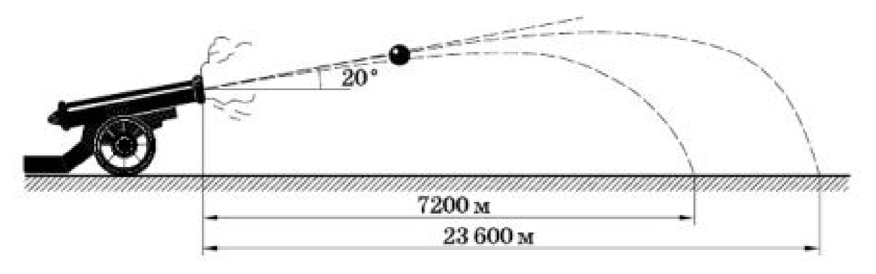


Рис. 1.77

Так как $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$, то, положив $\pi - 2\alpha = 2\beta$, найдём, что $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ для угла $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда видно, что при углах бросания α и β, составляющих в сумме 90°, горизонтальная дальность полёта одинакова (настильная и навесная стрельба).

Полученные результаты о максимальной дальности полёта и одинаковой дальности полёта при углах α и β можно наблюдать с помощью водяных струй (см. рис. 1.75).

Наибольшая высота подъёма

Наибольшую высоту подъёма можно определить из второго уравнения системы (1.24.2), подставив в него время подъёма (1.24.4):

$$y_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (1.24.9)$$

Если бросание происходит с поверхности Земли ($h = 0$), то

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (1.24.10)$$

Наибольшая высота подъёма пропорциональна квадрату начальной скорости и возрастает с увеличением угла бросания.

Частные случаи движения тела, брошенного под углом к горизонту

1. Если угол $\alpha = 0°$, то начальная скорость $\vec{v}_0$ направлена горизонтально вдоль оси X. Это случай движения тела, брошенного горизонтально (рис. 1.78). Решается эта задача с помощью уравнений (1.24.1) и (1.24.2). Траекторией является парабола с вершиной в точке бросания.

Но здесь имеется один любопытный момент: время полёта получается таким же, как и при свободном падении тела с той же высоты при $v_0 = 0$. Действительно, из уравнения (1.24.5) для $\alpha = 0°$ следует:

$$t_{\text{пол}} = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Этот результат совпадает с выражением для времени, полученным из формулы (1.23.2).

Наглядное представление о траектории тела, брошенного горизонтально, например стального шарика, можно получить, если сфотографировать шарик, освещая его во время падения кратковременными вспышками света, следующими друг за другом через одинаковые интервалы. Полученная таким образом картина движения шарика представлена на рисунке 1.79. Слева для сравнения показаны положения шарика, начавшего падать вниз без начальной скорости в тот момент, когда началось движение шарика, брошенного горизонтально. Обратите внимание на то, что оба шарика в любой момент времени находятся на одной высоте. Это означает, что их координаты y меняются со временем совершенно одинаково. На изменение координаты y не оказывает

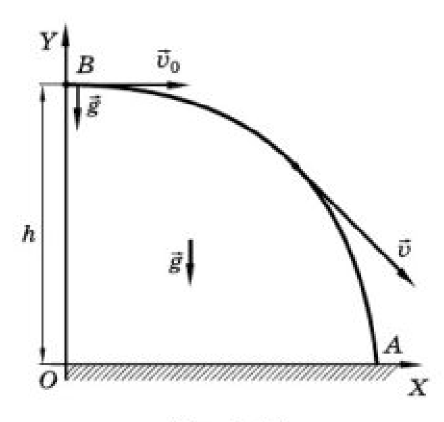


Рис. 1.78

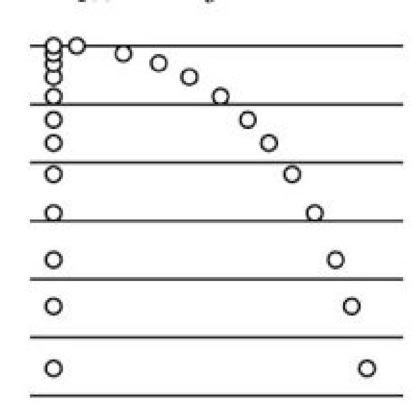


Рис. 1.79

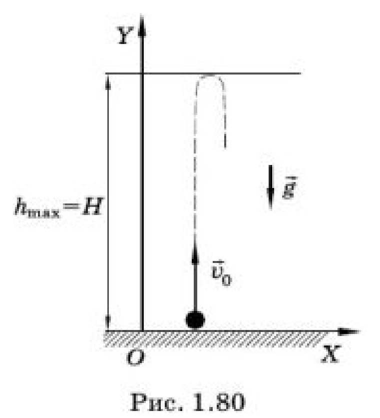


Рис. 1.80

никакого влияния смещение шарика в горизонтальном направлении вдоль оси X.

2. Если угол $\alpha = 90°$, то вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен вертикально вверх (рис. 1.80). Сначала тело движется равнозамедленно вверх, достигает максимальной высоты h_{max}, а затем падает вниз равноускоренно.

Данная задача полностью решается с помощью тех же уравнений (1.24.1) и (1.24.2). Но в этом случае достаточно формул для проекции скорости v_y и координаты y.

3. Если угол $\alpha = 270°$, то вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен вертикально вниз. Тело будет свободно падать с высоты h, имея начальную скорость $\vec{v}_0$. Движение тела происходит равноускоренно по вертикали.

4. Если $v_0 = 0$, то тело будет свободно падать с высоты h без начальной скорости (см. § 1.23).

Тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе, если не учитывать сопротивление воздуха. Зная ускорение свободного падения и начальную скорость, можно вычислить дальность и время полёта.

§ 1.25. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Свободно падающее тело за последнюю секунду падения прошло $\frac{1}{3}$ своего пути. Найдите время падения t и высоту h, с которой упало тело.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Пусть $\Delta h = h - h_1$, где h_1 — путь тела при свободном падении за время $t_1 = t - \tau$ ($\tau = 1$ с). Тогда можно записать:

$$h_1 = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Кроме того,

$$\frac{h}{3} = h - h_1 \quad \text{или} \quad \frac{g(t-\tau)^2}{2} = \frac{gt^2}{3}.$$

Отсюда

$$t = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \approx 5{,}4 \text{ с}.$$

Тело упало с высоты $h = \frac{g}{2}\frac{3\tau^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = (5 \cdot 5{,}4^2) \text{ м} \approx 146 \text{ м}.$

Задача 2

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Какой путь прошло тело за 3 с полёта? Найдите модуль и направление скорости в конце этого промежутка времени.

Решение. Чтобы найти скорость $\vec{\upsilon}$, воспользуемся формулой для проекции скорости υ_y: $\upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t$. Ось Y направим вертикально вверх (см. рис. 1.80). Тогда $\upsilon_y = \upsilon_0 - gt = -10$ м/с. Модуль скорости $\upsilon = 10$ м/с. Так как проекция скорости отрицательна, то скорость $\vec{\upsilon}$ направлена противоположно направлению оси Y, т. е. вниз.

Направление скорости тела изменилось, поэтому пройденный путь будет складываться из максимальной высоты подъёма $h_{max} = H$ и участка траектории $H - y$, на который опустилось тело:

$$s = H + (H - y) = 2H - y.$$

Время подъёма на максимальную высоту можно определить из условия $\upsilon_y = 0$. Отсюда

$$t_{\text{под}} = \frac{\upsilon_0}{g} = 2 \text{ с}.$$

Максимальная высота подъёма

$$H = \upsilon_0 t_{\text{под}} - \frac{g t_2^2}{2} = 20 \text{ м}.$$

Найдём координату тела y спустя время $t = 3$ с после начала движения:

$$y = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} = 15 \text{ м}.$$

Пройденный телом путь

$$s = 2H - y = 25 \text{ м}.$$

Задача 3

С башни высотой $h = 10$ м в горизонтальном направлении бросают камень со скоростью $\upsilon_1 = 23$ м/с. Одновременно с поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту бросают второй камень со скоростью $\upsilon_2 = 20$ м/с навстречу первому. Определите, на каком расстоянии l от подножия башни находится точка бросания второго камня, если камни столкнулись в воздухе.

Решение. Выберем систему координат XOY так, чтобы скорости бросания камней лежали в этой плоскости. Начало координат расположим на поверхности Земли. Ось Y направим вверх так, чтобы она проходила через точку бросания первого камня. Ось X направим вправо (рис. 1.81).

Координата y в зависимости от времени меняется следующим образом:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В соответствии с условием задачи и рисунком 1.81 уравнения координат первого и второго тел можно записать так:

$$y_1 = h - \frac{gt^2}{2} \text{ и } y_2 = \upsilon_2 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент встречи тел $y_1 = y_2$, или

$$h - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_2 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

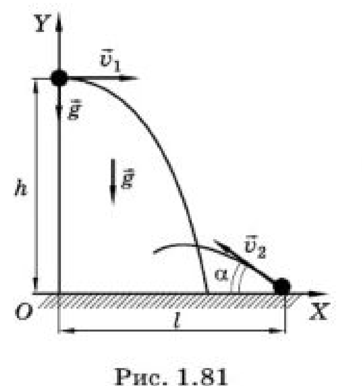


Рис. 1.81

Отсюда

$$t = \frac{h}{\upsilon_2 \sin\alpha}. \qquad (1.25.1)$$

Теперь воспользуемся формулой зависимости координаты x от времени:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Согласно условию задачи и в соответствии с выбранной системой координат XOY

$$x_1 = \upsilon_1 t \text{ и } x_2 = l - \upsilon_2 t\cos\alpha.$$

При столкновении камней $x_1 = x_2$, или $v_1 t = l - v_2 t\cos\alpha$. Отсюда

$$l = (v_1 + v_2\cos\alpha)t.$$

Заменяя в этой формуле время выражением (1.25.1), получим

$$l = (v_1 + v_2\cos\alpha)\frac{h}{v_2\sin\alpha} = 40{,}4 \text{ м}.$$

Упражнение 4

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 30 м/с. Через какой промежуток времени оно будет на высоте 25 м?
2. К стене на нити подвешена линейка длиной 25 см. Под линейкой в стене имеется маленькое отверстие. На какой высоте h над отверстием должен находиться нижний край линейки, если после пережигания нити линейка, свободно падая, закрывала собой отверстие в течение 0,1 с? Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.
3. С какой высоты упало тело, если в последнюю секунду падения оно прошло путь, равный 75 м?
4. Воздушный шар поднимается вверх без начальной скорости с постоянным ускорением и за 20 с достигает высоты 200 м. Спустя 10 с после начала движения от шара без толчка отделился балласт. Через какое время балласт достигнет земли?
5. Брошенное вертикально вверх тело на высоте 25 м побывало дважды с интервалом времени 4 с. Определите модуль начальной скорости тела, а также модули и направления скоростей тела на высоте 25 м.
6. Два тела брошены вертикально вверх с одинаковыми скоростями $\vec{v}_0$ из одной точки одно вслед за другим с интервалом времени, равным τ $\left(0 < \tau < \frac{2v_0}{g}\right)$. Через какое время после бросания первого тела они встретятся?
7. Камень брошен горизонтально. Через 3 с его скорость оказалась направленной под углом 45° к горизонту. Найдите модули начальной скорости и скорости тела спустя 3 с.
8. Тело брошено с поверхности Земли под углом 30° к горизонту. Найдите модуль начальной скорости, если на высоте 10 м тело побывало дважды с интервалом времени 1 с.

9. Тело брошено под углом 60° к горизонту с начальной скоростью 21 м/с. На какой высоте вектор скорости будет составлять с горизонтом угол 30°?

10. С высоты H на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, свободно падает мяч и упруго отражается[1] с той же по модулю скоростью. Найдите расстояние от места первого соударения до второго; затем от второго до третьего и т. д. Определите расстояние между первым и вторым соударениями для случая, когда $\alpha = 45°$ и $H = 0{,}5$ м.

11. Из шланга, лежащего на земле, бьёт под углом 30° к горизонту вода с начальной скоростью 10 м/с. Площадь сечения отверстия шланга равна 2 см^2. Определите массу струи, находящейся в воздухе. Плотность воды 1000 кг/м^3.

12. Два тела брошены одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое под углом 60° к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$ м/с. Найдите расстояние между телами спустя время $t = 1{,}7$ с.

13. С поверхности Земли одновременно бросают два тела: одно вертикально вверх, второе под углом к горизонту. Найдите угол, под которым бросили второе тело, если оба тела упали одновременно, причём высота подъёма тела, брошенного вертикально вверх, равна расстоянию, на котором второе тело упало от точки бросания.

---

1. Напишите эссе «Пизанская башня: от физических опытов до памятника культуры».

2. Подготовьте фотоальбом «Движение тела, брошенного под углом к горизонту: история и современность».

§ 1.26. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ. ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ

Характерные особенности этого движения содержатся в его названии: равномерное — значит, с постоянной по модулю скоростью (v = const), *по окружности — значит, траектория — окружность.*

---

[1] «Упруго отражается» — это значит, что угол падения мяча равен углу отражения. Углы падения и отражения — это углы, образованные векторами скорости мяча до и после удара о плоскость и перпендикуляром к плоскости в точке удара мяча.

Равномерное движение по окружности

До сих пор мы изучали движения с постоянным ускорением. Однако чаще встречаются случаи, когда ускорение изменяется.

Вначале мы рассмотрим простейшее движение с переменным ускорением, когда модуль ускорения не меняется. Таким движением, в частности, является равномерное движение точки по окружности: за любые равные промежутки времени точка проходит дуги одинаковой длины. При этом скорость тела (точки) не изменяется по модулю, а меняется лишь по направлению.

Мы по-прежнему будем считать тело настолько малым, что его можно рассматривать как точку. Для этого размеры тела должны быть малы по сравнению с радиусом окружности, по которой движется тело.

Среднее ускорение

Пусть точка в момент времени t занимает на окружности положение A, а через малый интервал времени Δt — положение A_1 (рис. 1.82, *а*). Обозначим скорость точки в этих положениях через $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$. При равномерном движении $v_1 = v$.

Для нахождения мгновенного ускорения сначала найдём среднее ускорение точки. Изменение скорости за время Δt равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ (см. рис. 1.82, *а*).

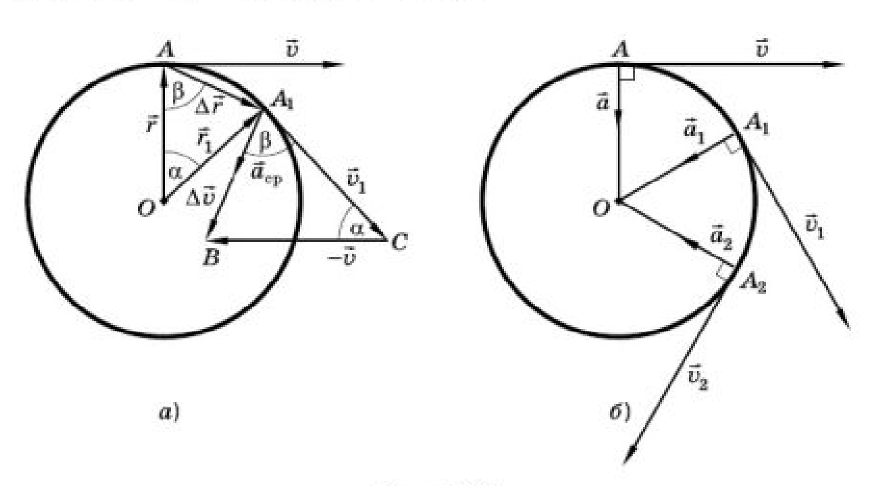


Рис. 1.82

По определению среднее ускорение равно

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Центростремительное ускорение

Задачу нахождения мгновенного ускорения разобьём на две части: сначала найдём модуль ускорения, а потом его направление. За время Δt точка A совершит перемещение $\overrightarrow{AA_1} = \Delta\vec{r}$. Рассмотрим треугольники OAA_1 и A_1CB (см. рис. 1.82, *а*). Углы при вершинах этих равнобедренных треугольников равны, так как соответствующие стороны перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны. Следовательно,

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}.$$

Разделив обе части равенства на Δt, перейдём к пределу при стремлении интервала времени $\Delta t \to 0$:

$$\frac{1}{v}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{1}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \qquad (1.26.1)$$

Предел в левой части равенства есть модуль мгновенного ускорения, а предел в правой части равенства представляет собой модуль мгновенной скорости точки. Поэтому равенство (1.26.1) примет вид

$$\frac{1}{v}a = \frac{1}{r}v.$$

Отсюда

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}.} \qquad (1.26.2)$$

Очевидно, что модуль ускорения при равномерном движении точки по окружности есть постоянная величина, так как v и r не изменяются при движении.

Направление ускорения

Найдём направление ускорения $\vec{a}$. Из треугольника A_1CB следует, что вектор среднего ускорения составляет с вектором скорости угол $\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$. Но при $\Delta t \to 0$ точка A_1 бесконечно близко подходит к точке A и угол $\alpha \to 0$. Следователь-

но, вектор мгновенного ускорения составляет с вектором скорости угол

$$\beta = \lim_{\alpha \to 0} \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ.$$

Значит, вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ направлен к центру окружности (рис. 1.82, *б*). Поэтому это ускорение называется ц е н т р о с т р е м и т е л ь н ы м (или нормальным[1]).

Центростремительное ускорение на карусели и в ускорителе элементарных частиц

Оценим ускорение человека на карусели. Скорость кресла, в котором сидит человек, составляет 3—5 м/с. При радиусе карусели порядка 5 м центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r} \approx 2—5$ м/с^2. Это значение довольно близко к ускорению свободного падения 9,8 м/с^2.

А вот в ускорителях элементарных частиц скорость оказывается довольно близкой к скорости света $3 \cdot 10^8$ м/с. Частицы движутся по круговой орбите радиусом в сотни метров. При этом центростремительное ускорение достигает огромных значений: 10^{14}—10^{15} м/с^2. Это в 10^{13}—10^{14} раз превышает ускорение свободного падения.

Равномерно движущаяся по окружности точка имеет постоянное по модулю ускорение $a = \frac{v^2}{r}$, направленное по радиусу к центру окружности (перпендикулярно скорости). Поэтому это ускорение называется центростремительным или нормальным.
Ускорение $\vec{a}$ при движении непрерывно изменяется по направлению (см. рис. 1.82, *б*). *Значит, равномерное движение точки по окружности является движением с переменным ускорением.*

? **1.** Докажите построением, что при равномерном движении точки по окружности ускорение направлено к центру.

---

[1] От латинского слова normalis — «прямой». Нормаль к кривой линии в данной точке — прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной, проведённой через ту же точку.

2. Оцените центростремительное ускорение человека при поездке в метро на закруглённом участке пути. Необходимые данные найдите самостоятельно с помощью Интернета.

§ 1.27. ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ, НОРМАЛЬНОЕ И ПОЛНОЕ УСКОРЕНИЯ

Когда точка движется произвольно, то её скорость изменяется как по направлению, так и по модулю. В этом случае очень удобно полное ускорение разложить на составляющие по направлению скорости и перпендикулярно к ней.

Ускорение при неравномерном криволинейном движении

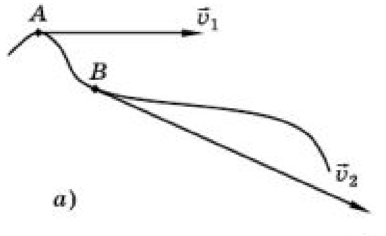
Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение A (рис. 1.83, *а*) и имеет скорость $\vec{v}_1$, а спустя малое время Δt точка переместилась в положение B, приобретя скорость $\vec{v}_2$.

Разложим вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$ на составляющие $\Delta\vec{v}_\tau$ и $\Delta\vec{v}_n$ (рис. 1.83, *б*). Первая составляющая направлена по скорости $\vec{v}_1$, т. е. по касательной к траектории, проведённой в точке A. Она называется тангенциальной (касательной) составляющей вектора $\Delta\vec{v}$. Составляющая $\Delta\vec{v}_n \perp \vec{v}_1$. Поэтому $\Delta\vec{v}_n$ называется нормальной составляющей приращения скорости $\Delta\vec{v}$. По правилу сложения векторов

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n.$$

Разделим почленно это равенство на Δt и перейдём к пределу при стремлении $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}. \qquad (1.27.1)$$



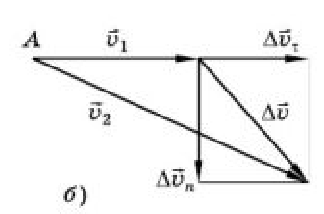


Рис. 1.83

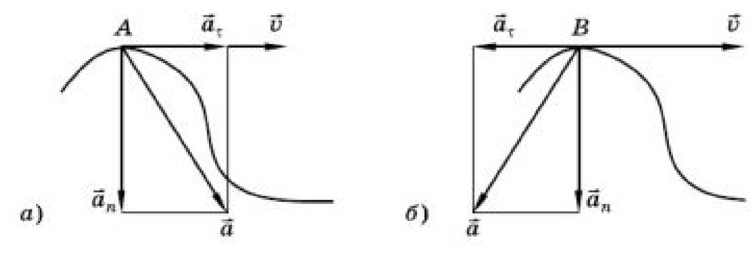


Рис. 1.84

Каждое слагаемое этого равенства есть составляющая ускорения (см. § 1.15). Левая часть равенства (1.27.1) является полным ускорением точки. Первое слагаемое в правой части называется **тангенциальным** (касательным) **ускорением**, второе слагаемое — уже знакомое нам **нормальное ускорение**.

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории, так как $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$. При ускоренном движении точки (модуль скорости возрастает) касательное ускорение имеет то же направление, что и скорость. При замедленном движении оно направлено противоположно скорости. *Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ перпендикулярно скорости и характеризует быстроту изменения направления скорости.*

Полное ускорение точки равно сумме тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.27.2)$$

На рисунке 1.84, *а* изображён случай ускоренного движения, а на рисунке 1.84, *б* — замедленного движения точки.

Модуль нормального ускорения

Мы нашли, как направлены тангенциальное и нормальное ускорения. Выражение для модуля нормального ускорения при движении по окружности радиусом r нам известно:

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \qquad (1.27.3)$$

Если движение происходит вдоль произвольной кривой, то под r надо понимать радиус кривизны траектории в данной точке. Выясним, что такое радиус кривизны кривой линии в точке.

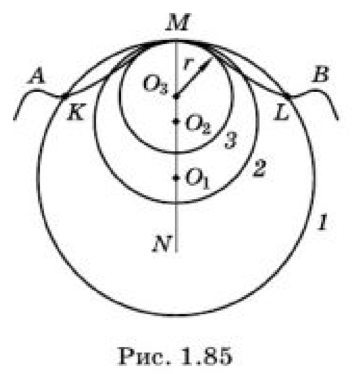


Рис. 1.85

Выберем на кривой AB вблизи точки M с обеих сторон от неё ещё две точки: K и L (рис. 1.85). Через три точки K, M и L можно провести единственную окружность. Если точки K и L приближать к точке M, каждый раз проводя через эти три точки окружность, то мы получим серию окружностей разных радиусов, дуги которых вблизи точки M всё меньше и меньше будут отличаться от кривой AB.

В пределе, когда точки K и L сколь угодно близко подходят к точке M, радиус проходящей через них окружности также стремится к предельному значению. Это предельное значение радиусов окружностей и называется **радиусом кривизны кривой** AB в точке M.

Модуль тангенциального и полного ускорений

Модуль тангенциального ускорения равен

$$|\vec{a}_\tau| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\vec{v}_\tau|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \qquad (1.27.4)$$

где dv — приращение модуля скорости за бесконечно малый интервал времени dt. Модуль полного ускорения $\vec{a}$ точки можно найти по теореме Пифагора (см. рис. 1.84, *а*, *б*):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.27.5)$$

Полное ускорение направлено по секущей в сторону вогнутости траектории.

Классификация движений

По значениям, которые принимают нормальное и тангенциальное ускорения, можно классифицировать различные движения точки.

Если $a_n = 0$, то при любых значениях скорости движение точки происходит по прямой линии. Эту прямую можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса ($r \to \infty$).

Если $a_\tau = 0$ и $a_n = 0$, но скорость отлична от нуля, то движение по прямой будет равномерным, так как не меняется модуль скорости.

В случае $a_n \neq 0$ движение точки криволинейное, так как меняется направление скорости. Когда $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$, то при движении по кривой линии модуль скорости точки не изменяется — точка движется равномерно.

Если $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$, то точка совершает равномерное движение по окружности.

И наконец, когда оба ускорения $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ отличны от нуля, то точка движется неравномерно по криволинейной траектории.

В заключение заметим, что если точка движется равномерно по криволинейной траектории, то можно вычислить путь, пройденный точкой, по формуле $s = vt$.

При произвольном движении вектор ускорения направлен внутрь траектории. Тангенциальная составляющая этого вектора характеризует изменение скорости по модулю, а нормальная составляющая — по направлению.

? 1. Поясните физический смысл тангенциального и нормального ускорений тела.

2. Проведите классификацию движений ($|\vec{v}| = \text{const}$, $|\vec{v}| \neq \text{const}$) с конкретными примерами (результат представьте в виде таблицы).

§ 1.28. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

При движении точки по окружности радиус R, очевидно, постоянная величина. Это позволяет ввести новые величины, наилучшим образом описывающие данное движение: положение характеризовать углом, а вместо обычных скоростей и ускорений ввести угловую скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость

Проведём координатную ось X через центр окружности (начало координат), вдоль которой движется точка (рис. 1.86). Тогда положение точки A на окружности в любой момент времени однозначно определяется углом φ между осью X и радиусом-вектором $\vec{R}$, проведённым из центра

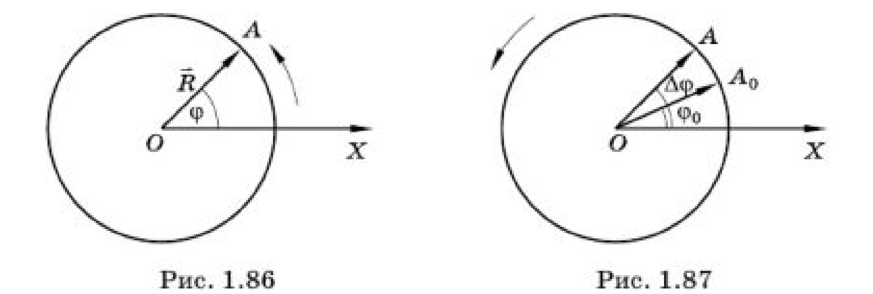


Рис. 1.86 Рис. 1.87

окружности к движущейся точке. Углы будем выражать в радианах[1].

При движении точки угол φ изменяется. Обозначим изменение угла за время Δt через $\Delta\varphi$. Для нахождения положения точки в любой момент времени надо знать угол φ_0 в начальный момент времени t_0 и определить, на сколько изменился угол за время движения (рис. 1.87):

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi. \qquad (1.28.1)$$

Пусть точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью. Тогда за любые равные промежутки времени радиус-вектор поворачивается на одинаковые углы. Быстрота обращения точки определяется углом поворота радиуса-вектора за данный интервал времени. Например, если радиус-вектор точки за каждую секунду поворачивается на угол $90° = \frac{\pi}{2}$, а другой точки — на угол $45° = \frac{\pi}{4}$, то мы говорим, что первая точка обращается быстрее второй в два раза.

Если при равномерном обращении за время Δt радиус-вектор повернулся на угол $\Delta\varphi$, то быстрота обращения определится углом поворота в единицу времени. Быстроту обращения характеризуют угловой скоростью.

Угловой скоростью при равномерном движении точки по окружности называется отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошёл.

---

[1] Напомним, что радиан равен центральному углу, опирающемуся на дугу, длина которой равна радиусу окружности. 1 рад приблизительно равен 57°17′48″. В радианной мере угол равен отношению длины дуги окружности к её радиусу: $\varphi = \frac{l}{R}$.

Обозначим угловую скорость греческой буквой ω (омега). Тогда по определению[1]

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (1.28.2)$$

В СИ[2] угловая скорость выражается в радианах в секунду (рад/с).

Радиан в секунду равен угловой скорости равномерно обращающейся точки, при которой за время 1 с радиус-вектор этой точки поворачивается на угол 1 рад.

Например, угловая скорость точки земной поверхности равна 0,0000727 рад/с, а точильного диска — более 100 рад/с.

Угловую скорость можно выразить через частоту обращения, т. е. число оборотов за 1 с. Если точка делает n оборотов в секунду, то время одного оборота равно $\frac{1}{n}$. Это время называют периодом обращения и обозначают буквой T. Таким образом, частота и период обращения связаны следующим соотношением:

$$T = \frac{1}{n}. \qquad (1.28.3)$$

Полному обороту точки на окружности соответствует угол $\Delta\varphi = 2\pi$. Поэтому, согласно формуле (1.28.2),

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.} \qquad (1.28.4)$$

Частота обращения точек рабочих колёс мощных гидротурбин составляет 1—10 $с^{-1}$, винта вертолёта — 4—6 $с^{-1}$, ротора газовой турбины — 200—300 $с^{-1}$.

Если при равномерном обращении точки угловая скорость известна, то можно найти изменение угла поворота $\Delta\varphi$ за время Δt. Оно равно $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. С учётом этого формула (1.28.1) примет вид $\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t$. Приняв начальный момент

---

[1] Когда точка движется неравномерно, то мгновенная угловая скорость определяется как предел отношения $\Delta\varphi$ к Δt при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

[2] СИ — Международная система единиц. В этой системе за единицу длины принят 1 м, за единицу времени — 1 с. Подробнее о СИ будет рассказано в дальнейшем.

времени t_0 равным нулю, получим, что $\Delta t = t - t_0 = t$. Тогда угол поворота равен

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t.} \tag{1.28.5}$$

По этой формуле можно найти положение точки на окружности в любой момент времени.

Угловое ускорение

В случае переменной угловой скорости вводится новая физическая величина, характеризующая быстроту её изменения, — угловое ускорение:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.28.6}$$

Угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени. Если $\beta = \text{const}$, то $\omega(t) = \omega_0 + \beta(t - t_0)$, где ω_0 — угловая скорость в начальный момент времени t_0. При $t_0 = 0$

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t. \tag{1.28.7}$$

Эта формула подобна формуле проекции скорости $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$ при прямолинейном движении точки.

Соответственно угол поворота

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \tag{1.28.8}$$

Эту формулу можно получить точно таким же способом, как и уравнение координаты при прямолинейном движении:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Связь между линейной и угловой скоростями

Скорость точки, движущейся по окружности, часто называют линейной скоростью, чтобы подчеркнуть её отличие от угловой скорости. Между линейной скоростью точки, обращающейся по окружности, и её угловой скоростью существует связь. При равномерном движении точки по любой траектории модуль скорости равен отношению пути s ко времени Δt, за которое этот путь пройден. Точка A, движущаяся по окружности радиусом R, за время Δt проходит путь, равный длине дуги $\overset{\frown}{A_1A_2}$ (рис. 1.88): $s = \overset{\frown}{A_1A_2} = \Delta\varphi R$.

Модуль линейной скорости движения

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}R = \omega R.$$

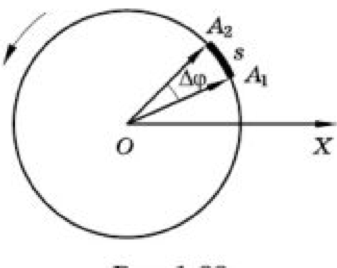


Рис. 1.88

Итак, *модуль линейной скорости точки, движущейся по окружности, равен произведению угловой скорости на радиус окружности*:

$$\boxed{v = \omega R.} \qquad (1.28.9)$$

Эта формула справедлива как для равномерного, так и для неравномерного движения точки по окружности.

Из выражения (1.28.9) видно, что чем больше радиус окружности, тем больше линейная скорость точки. Для точек земного экватора $v = 465$ м/с, а на широте Санкт-Петербурга — 233 м/с. На полюсах Земли $v = 0$.

Модуль ускорения точки, движущейся равномерно по окружности (центростремительное, или нормальное, ускорение), можно выразить через угловую скорость тела и радиус окружности. Так как $a = \frac{v^2}{R}$ и $v = \omega R$, то

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.} \qquad (1.28.10)$$

Чем больше радиус окружности, тем большее по модулю ускорение имеет точка при заданной угловой скорости. Ускорение любой точки поверхности Земли на экваторе составляет 3,4 см/с^2.

Связь линейного ускорения с угловым

С изменением угловой скорости точки меняется и её линейная скорость. Нормальное ускорение связано, согласно формуле (1.28.10), с угловой скоростью и не зависит, следовательно, от углового ускорения. Но тангенциальное ускорение, определяемое формулой (1.27.4), выражается через угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \beta R. \qquad (1.28.11)$$

Мы научились полностью описывать движение точки по окружности. При фиксированном радиусе окружности модуль скорости (линейная скорость) пропорционален угловой скорости, а нормальное ускорение пропорционально её квадрату. Тангенциальное ускорение пропорционально угловому ускорению.

? 1. С какой целью при описании криволинейного движения вводятся угловые величины?

2. Проведите аналогию между уравнениями, описывающими линейные и угловые величины.

Упражнение 5

1. Поезд движется по закруглению радиусом 200 м со скоростью 36 км/ч. Найдите модуль нормального ускорения.
2. Тело брошено с поверхности Земли под углом 60° к горизонту. Модуль начальной скорости равен 20 м/с. Чему равен радиус кривизны траектории в точке максимального подъёма?
3. Определите радиус кривизны траектории снаряда в момент вылета из орудия, если модуль скорости снаряда равен 1 км/с, а скорость составляет угол 60° с горизонтом.
4. Снаряд вылетает из орудия под углом 45° к горизонту. Чему равна дальность полёта снаряда, если радиус кривизны траектории в точке максимального подъёма равен 15 км?
5. Сферический резервуар, стоящий на земле, имеет радиус R. При какой наименьшей скорости камень, брошенный с поверхности Земли, может перелететь через резервуар, коснувшись его вершины? Под каким углом к горизонту должен быть при этом брошен камень?
6. Въезд на один из самых высоких в Японии мостов имеет форму винтовой линии, обвивающей цилиндр радиусом r. Полотно дороги составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите модуль ускорения автомобиля, движущегося по въезду с постоянной по модулю скоростью υ.
7. Точка начинает двигаться равноускоренно по окружности радиусом 1 м и за 10 с проходит путь 50 м. Чему равно нормальное ускорение точки через 5 с после начала движения?
8. Поезд въезжает на закруглённый участок пути с начальной скоростью 54 км/ч и проходит путь 600 м за 30 с. Радиус закругления равен 1 км. Определите модуль ско-

рости и полное ускорение поезда в конце этого пути, считая тангенциальное ускорение постоянным по модулю.

9. Груз P начинает опускаться с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2 и приводит в движение ступенчатый шкив радиусами $r = 0{,}25$ м и $R = 0{,}50$ м (рис. 1.89). Какое ускорение a_1 будет иметь точка M через $t = 0{,}50$ с после начала движения?

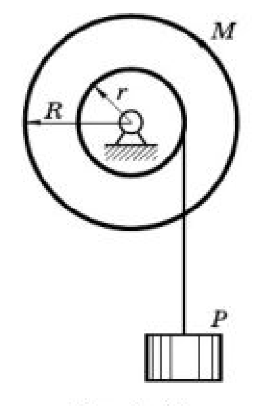
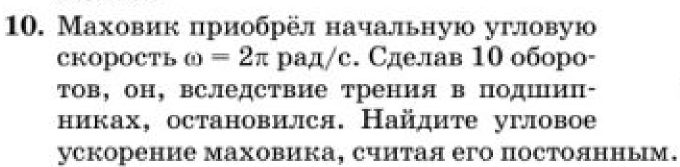


Рис. 1.89



10. Маховик приобрёл начальную угловую скорость $\omega = 2\pi$ рад/с. Сделав 10 оборотов, он, вследствие трения в подшипниках, остановился. Найдите угловое ускорение маховика, считая его постоянным.

11. Маховое колесо радиусом $R = 1$ м начинает движение из состояния покоя равноускоренно. Через $t_1 = 10$ с точка, лежащая на его ободе, приобретает скорость $\upsilon_1 = 100$ м/с. Найдите скорость, а также нормальное, касательное и полное ускорения этой точки в момент времени $t_2 = 15$ с.

12. Шкив радиусом $R = 20$ см начинает вращаться с угловым ускорением $\beta = 3$ рад/с^2. Через какое время точка, лежащая на его ободе, будет иметь ускорение $a = 75$ см/с^2?

13. Точка начинает обращаться по окружности с постоянным ускорением $\beta = 0{,}04$ рад/с^2. Через какое время вектор её ускорения будет составлять с вектором скорости угол $\alpha = 45°$?

§ 1.29. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Ещё в § 1.2 при первом знакомстве с механическим движением мы подчёркивали необходимость выбора системы отсчёта. Настала пора проанализировать выводы о движении, полученные наблюдателями, находящимися в разных системах отсчёта, и сравнить результаты их наблюдений.

В начале изучения кинематики для описания движения тела мы ввели понятие системы отсчёта. Дело в том, что не имеют определённого смысла слова «тело движется». Нужно сказать, по отношению к каким телам или относительно какой системы отсчёта это движение рассматривается. В этом мы неоднократно убеждались. Приведём ещё несколько примеров.



Пассажиры движущегося поезда неподвижны относительно стен вагона. И те же пассажиры движутся в системе отсчёта, связанной с Землёй. Поднимается лифт. Стоящий на его полу чемодан покоится относительно стен лифта и человека, находящегося в лифте. Но он движется относительно земли и дома.

Ещё пример: соревнуются мотоциклисты. Вот они поравнялись и начали двигаться относительно Земли с одинаковыми скоростями. Расстояние между ними не изменяется, они не обгоняют друг друга. Друг относительно друга мотоциклисты покоятся, но движутся относительно Земли.

Этих примеров достаточно, чтобы убедиться в относительности движения и, в частности, относительности понятия скорости. Скорость одного и того же тела различна в разных системах отсчёта.

При решении конкретной задачи мы можем выбрать ту или иную систему отсчёта. Но среди этих систем отсчёта находятся одна-две наиболее удобные, в которых движение выглядит проще. Особенно важен выбор системы отсчёта в космонавтике. Стыковку космических кораблей рассматривают в системе отсчёта, связанной с одним из кораблей. При выводе корабля на орбиту удобнее система отсчёта, связанная с Землёй (геоцентрическая система). Полёт межпланетных станций изучают в гелиоцентрической системе отсчёта. Начало координат этой системы совмещено с центром Солнца, а координатные оси направлены на три звезды, положение которых практически не меняется со временем (вследствие их удалённости от Солнечной системы).

Наблюдатели, находящиеся в разных системах отсчёта, должны хорошо понимать друг друга. Космонавты на орбитальной станции и люди в Центре управления полётами должны представлять движение с точки зрения Земли и корабля, уметь быстро определять характеристики движения в любой из систем, если известно, как оно происходит в одной из них.

Об относительности движения люди догадывались давно. Наиболее чётко понятие относительности движения было сформулировано Коперником и Галилеем. В своём знаменитом труде «О вращении небесных сфер» Коперник писал: «Так при движении корабля в тихую погоду всё находящееся вне представляется мореплавателям движущимся, а сами наблюдатели, наоборот, считают себя в покое со всем с ними находящимся. Это же, без сомнения, может происходить при движении Земли, так что мы думаем, будто вокруг неё вращается вся Вселенная».

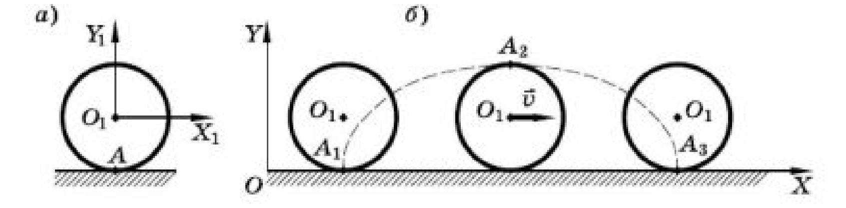


Рис. 1.90

Относительна не только скорость, но и форма траектории, пройденный телом путь. Катится, к примеру, колесо по поверхности Земли (рис. 1.90, *а*). Точка A обода колеса относительно системы координат $X_1O_1Y_1$ движется по окружности, проходя за время одного оборота колеса путь, равный длине окружности. Но относительно системы координат XOY (рис. 1.90, *б*), связанной с поверхностью Земли, траекторией точки A является более сложная кривая $A_1A_2A_3$, называемая циклоидой. За тот же интервал времени точка A проходит путь, равный длине этой кривой.

Представьте себе пассажира в движущемся равномерно относительно поверхности Земли вагоне, выпускающего из рук мяч. Он видит, как мяч падает относительно вагона вертикально вниз с ускорением $\vec{g}$. Свяжем с вагоном систему координат $X_1O_1Y_1$ (рис. 1.91). В этой системе координат за время падения мяч пройдёт путь $AD = h$, и пассажир отметит, что мяч упал на пол со скоростью $\vec{v}_1$, направленной вертикально вниз.

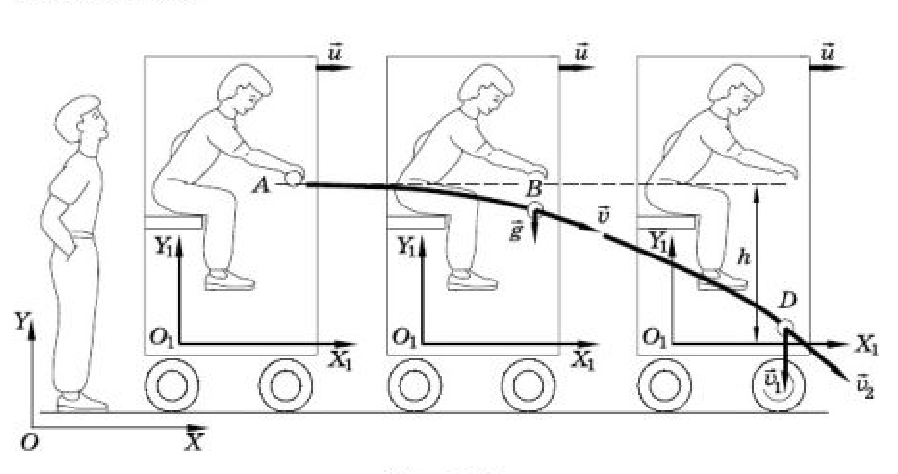


Рис. 1.91

Ну а что увидит наблюдатель, находящийся на неподвижной платформе, с которой связана система координат XOY? Он заметит (представим себе, что стены вагона прозрачны), что траекторией мяча является парабола AD и мяч упал на пол со скоростью $\vec{v}_2$, направленной под углом к горизонту (см. рис. 1.91).

Итак, мы отмечаем, что наблюдатели в системах координат $X_1O_1Y_1$ и XOY обнаруживают различные по форме траектории, скорости и пройденные пути при движении одного тела — мяча.

Надо отчётливо представлять себе, что все *кинематические понятия: траектория, координаты, путь, перемещение, скорость — имеют определённую форму или численные значения в одной выбранной системе отсчёта.* При переходе от одной системы отсчёта к другой указанные величины могут измениться. В этом и состоит относительность движения, и в этом смысле *механическое движение всегда относительно.*

Длительное время изучая кинематику точки, мы ограничивались выбором одной системы отсчёта. В этом есть определённый смысл. Не так уж просто было приобрести навыки в обращении с множеством вводимых понятий и их приложениями к количественным расчётам. Надо было научиться описывать движение точки хотя бы в одной системе отсчёта.

Важным вопросом кинематики является установление связи между кинематическими величинами, характеризующими механическое движение в двух различных системах отсчёта, движущихся друг относительно друга.

? По реке плывёт плот. Человек переходит из одной точки плота в другую в направлении, перпендикулярном течению реки. Начертите перемещение человека относительно плота, относительно берега, а также перемещение плота относительно берега.

§ 1.30. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Связь координат точки в системах отсчёта, движущихся друг относительно друга, описывается преобразованиями Галилея. Преобразования всех других кинематических величин являются их следствиями.

Преобразование координат

Найдём связь между координатами, проекциями скоростей и ускорений в двух системах отсчёта K и K_1, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью $\vec{u}$. Для простоты будем считать, что координатные оси X и X_1 обеих систем совпадают, а оси Y, Y_1 и Z, Z_1 параллельны друг другу. Пусть в начальный момент времени начала координат обеих систем совпадают.

Если в момент времени t движущаяся точка находилась в положении A (рис. 1.92), то её положения в системах отсчёта K и K_1 можно задать радиусами-векторами $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1A}$. Тогда $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{r}_1$. За время t начало координат системы отсчёта K_1 переместилось на $\overrightarrow{OO_1} = \vec{u}\,t$. Поэтому предыдущее равенство примет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}\,t. \qquad (1.30.1)$$

Запишем соотношение (1.30.1) в проекциях на ось X:

$$x = x_1 + u_x t. \qquad (1.30.2)$$

Координаты y, z и y_1, z_1 одинаковы в обеих системах отсчёта. Поэтому преобразования координат при переходе от системы отсчёта K_1 к системе отсчёта K будут иметь вид

$$x = x_1 + u_x t, \quad y = y_1, \quad z = z_1. \qquad (1.30.3)$$

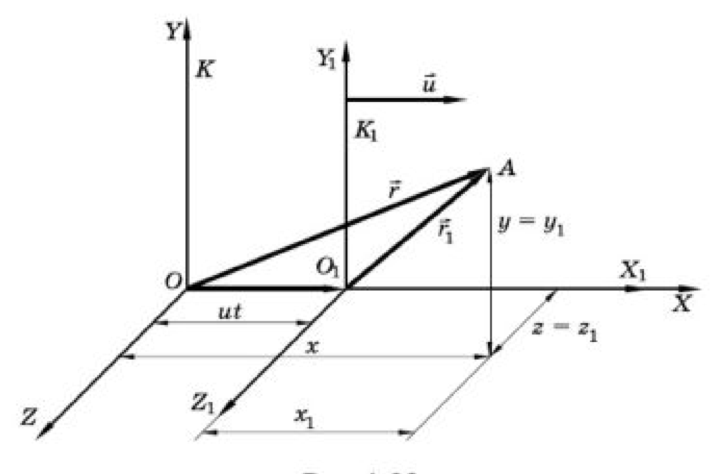


Рис. 1.92

Считается само собой разумеющимся, что время течёт одинаково в системах отсчёта K и K_1, так что $t = t_1$. Преобразования (1.30.1) или (1.30.3) вместе с утверждением о независимости течения времени от движения ($t = t_1$) называются *преобразованиями Галилея*.

Учитывая, что $u_x = u$, преобразования Галилея запишем так:

$$\begin{cases} x = x_1 + ut, \\ y = y_1, \\ z = z_1, \\ t = t_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = x - ut, \\ y_1 = y, \\ z_1 = z, \\ t_1 = t. \end{cases} \qquad (1.30.4)$$

Закон сложения скоростей

Найдём теперь преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчёта к другой.

При движении точки A её радиус-вектор $\vec{r}$ в системе отсчёта K за малый интервал времени Δt изменится на $\Delta\vec{r}$ и станет равным $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. За то же время в системе отсчёта K_1 вектор $\vec{r}_1$ изменится на $\Delta\vec{r}_1$ и станет равным $\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1$. Согласно равенству (1.30.1), эти новые векторы должны быть связаны соотношением

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1 + \vec{u}\,(t + \Delta t).$$

Учитывая, что $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t$, получим

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \vec{\ }\Delta t. \qquad (1.30.5)$$

Эта формула связывает перемещения $\Delta\vec{r}$ и $\Delta\vec{r}_1$ за время Δt. Разделим правую и левую части этого равенства на Δt и будем считать, что интервал Δt сколь угодно мал ($\Delta t \to 0$). Тогда вместо (1.30.5) получим уравнение

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \vec{u}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$ — есть мгновенная скорость точки в системе отсчёта K, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \vec{v}_1$ — мгновенная скорость этой же точки относительно системы отсчёта K_1.

Таким образом, скорости точки в различных системах отсчёта, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью $\vec{u}$, связаны соотношением

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u}.} \qquad (1.30.6)$$

Преобразование скоростей (1.30.6) называется законом сложения скоростей в классической механике.

Учитывая, что при движении вдоль совпадающих осей координат X и X_1 проекции скорости $\vec{u}$ на оси Y и Z равны нулю ($u_y = 0$, $u_z = 0$), закон сложения проекций скоростей можно записать так:

$$v_x = v_{1x} + u_x, \quad v_y = v_{1y}, \quad v_z = v_{1z}. \qquad (1.30.7)$$

Абсолютная, относительная и переносная скорости

Часто для большей наглядности и удобства используют понятия абсолютного, относительного и переносного движений[1]. Для этого одну из систем координат, например XOY, считают условно неподвижной. Движение тела относительно неподвижной системы координат называют абсолютным. Движение тела относительно подвижной системы координат (относительно $X_1O_1Y_1$) называют относительным. Движение подвижной системы координат относительно неподвижной называют переносным.

Скорость, ускорение, перемещение, путь и траекторию точки в неподвижной системе координат называют абсолютными, а в подвижной системе — относительными. В формуле (1.30.6) $\vec{v}$ — абсолютная скорость ($\vec{v}_{\text{а}}$), $\vec{v}_1$ — относительная скорость ($\vec{v}_{\text{от}}$) и $\vec{u}$ — переносная скорость ($\vec{v}_{\text{п}}$). Теперь закон сложения скоростей (1.30.6) можно записать так:

$$\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}. \qquad (1.30.8)$$

Абсолютная скорость равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

---

[1] Все эти понятия ни в коем случае не надо понимать буквально, так как никакого абсолютного движения нет. Но при использовании этих понятий формула сложения скоростей становится проще для запоминания и применения, чем при использовании безликих индексов у скоростей.

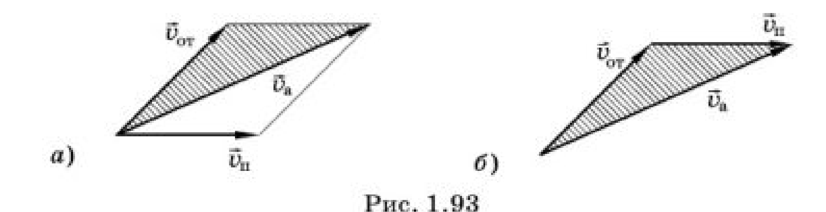


Рис. 1.93

Закон сложения скоростей (1.30.8) геометрически осуществляется по правилу параллелограмма (рис. 1.93, *а*) или треугольника (рис. 1.93, *б*). Он справедлив и в том случае, когда скорость $\vec{v}_п$ направлена произвольным образом по отношению к системе отсчёта K и меняется с течением времени.

Преобразование ускорений

Пусть в системе отсчёта K_1 ускорение тела равно $\vec{a}_{от}$. Каким оно будет в системе отсчёта K?

Прежде всего договоримся, что система отсчёта K_1 движется относительно системы отсчёта K не вращаясь, т. е. так, что оси X, Y, Z и X_1, Y_1, Z_1 остаются параллельными. Только при этом условии будет справедлив следующий ниже вывод.

Запишем закон сложения скоростей (1.30.8) для двух моментов времени $t_0 = 0$ и t:

$$\vec{v}_а(0) = \vec{v}_{от}(0) + \vec{v}_п(0), \quad \vec{v}_а(t) = \vec{v}_{от}(t) + \vec{v}_п(t).$$

Вычтем почленно из второго уравнения первое и разделим обе части полученного равенства на интервал времени Δt:

$$\frac{\Delta\vec{v}_а}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_{от}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_п}{\Delta t}.$$

Будем промежуток времени Δt неограниченно уменьшать ($\Delta t \to 0$) и перейдём к пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_а}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_{от}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}_п}{\Delta t}.$$

Это равенство означает, что

$$\vec{a}_а = \vec{a}_{от} + \vec{a}_п. \qquad (1.30.9)$$

Итак, ускорение тоже о т н о с и т е л ь н о. Но есть один очень важный случай, когда ускорение о д и н а к о в о, а б с о л ю т н о. Это случай, когда $a_п = 0$, т. е. вторая система отсчёта движется относительно первой равномерно и прямолинейно.

Независимость расстояний от выбора системы отсчёта

Из преобразований Галилея вытекает равенство расстояний между двумя точками во всех системах отсчёта, движущихся относительно друг друга. Расстояние между двумя точками A и B в системе отсчёта K представляет собой модуль вектора $\vec{r}_A - \vec{r}_B$, т. е. $r_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$. Согласно преобразованиям Галилея (1.30.1),

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{1A} + \vec{u}t \text{ и } \vec{r}_B = \vec{r}_{1B} + \vec{u}t.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}_{1A} - \vec{r}_{1B}.$$

Но модуль вектора $\vec{r}_{1A} - \vec{r}_{1B}$ есть расстояние r_{1AB} между точками A и B в системе отсчёта K_1. Следовательно,

$$r_{AB} = r_{1AB}, \qquad (1.30.10)$$

так как модули равных векторов одинаковы. В координатной форме это уравнение запишется следующим образом:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2 + (z_{1A} - z_{1B})^2}. \qquad (1.30.11)$$

Относительная скорость двух тел

Рассмотрим два тела A и B, имеющих в системе отсчёта K скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$. Найдём скорость движения $\vec{v}_{BA}$ тела B относительно тела A. Для этого свяжем систему отсчёта K_1 с телом A (рис. 1.94). Тогда искомая относительная скорость $\vec{v}_{BA}$ есть скорость тела B относительно системы отсчёта K_1.

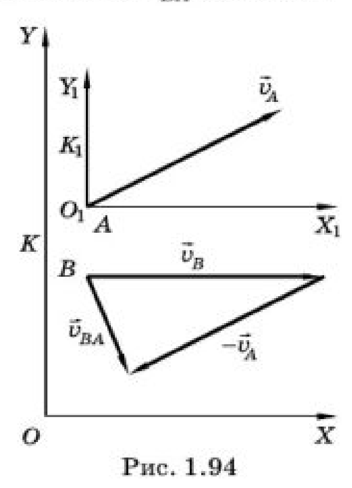


Рис. 1.94

Воспользуемся далее законом сложения скоростей (1.30.8). Для данного случая скорость тела B относительно системы отсчёта K представляет собой абсолютную скорость: $\vec{v}_B = \vec{v}_A$. Скорость тела A в системе отсчёта K — это переносная скорость. Наконец, скорость $\vec{v}_{BA}$ — это есть относительная

скорость: $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{от}$. Согласно закону сложения скоростей (1.30.8), имеем

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A,$$

или

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A.$$

Скорость движения тела B относительно тела A равна разности скоростей этих двух тел. Она не зависит от системы отсчёта. В любой системе отсчёта, движущейся со скоростью $\vec{u}$ относительно системы отсчёта K,

$$\vec{v}_{1A} = \vec{v}_A + \vec{u} \quad \text{и} \quad \vec{v}_{1B} = \vec{v}_B + \vec{u}.$$

Отсюда

$$\vec{v}_{1B} - \vec{v}_{1A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{BA} = \vec{v}_{1BA}. \qquad (1.30.12)$$

Преобразования Галилея (1.30.4) *вместе с утверждением о независимости течения времени от движения* ($t = t_1$) *отражают суть классических представлений о пространстве — времени. Согласно этим представлениям, расстояния между телами одинаковы во всех системах отсчёта и течение времени не зависит от систем отсчёта.*

§ 1.31. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Из всех задач на относительность движения мы будем в основном решать такие, которые связаны с законом сложения скоростей (1.30.7) или (1.30.8). Для этого удобно использовать понятия абсолютного, относительного и переносного движений.

Решая задачу, следует выбрать две системы координат и одну из них условно принять за неподвижную, после чего уяснить, какая скорость будет абсолютной, переносной и относительной. Далее надо записать закон сложения скоростей (1.30.8). После этого можно переходить к записи этого закона в проекциях на выбранные направления осей координат. Но можно воспользоваться и геометрическим сложением векторов.

Мы рассмотрим несколько задач, причём в большинстве случаев приведём два решения с различным выбором неподвижной системы отсчёта. При этом убедимся, что не имеет принципиального значения, какую систему считать непо-

движной. Однако в некоторых случаях удачный выбор неподвижной системы отсчёта упрощает решение (задача 5).

Задача 1

Участок шоссе расположен параллельно железной дороге. Найдите время, в течение которого мотоциклист, движущийся со скоростью $\upsilon_1 = 80$ км/ч, будет перемещаться мимо встречного поезда длиной $l = 700$ м, следующего со скоростью $\upsilon_2 = 46$ км/ч. Обе скорости заданы относительно Земли.

Решение. 1. Если мотоциклист движется относительно поезда с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}$, то путь, равный длине поезда, он пройдёт за время

$$t = \frac{l}{\upsilon}.$$

Длина поезда известна. Скорость мотоциклиста относительно поезда найдём по закону сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon}_а = \vec{\upsilon}_{от} + \vec{\upsilon}_п.$$

Неподвижную систему координат XOY свяжем с Землёй, а подвижную $X_1O_1Y_1$ — с поездом (рис. 1.95). Движение мотоциклиста относительно Земли (неподвижной системы координат XOY) является абсолютным, а движение поезда относительно Земли — переносным. Скорость мотоциклиста относительно поезда (подвижной системы координат $X_1O_1Y_1$) является относительной. Следовательно, в данном случае $\vec{\upsilon}_а = \vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_п = \vec{\upsilon}_2$ и $\vec{\upsilon}_{от} = \vec{\upsilon}$. Поэтому закон сложения скоростей можно записать так:

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}_2 .$$

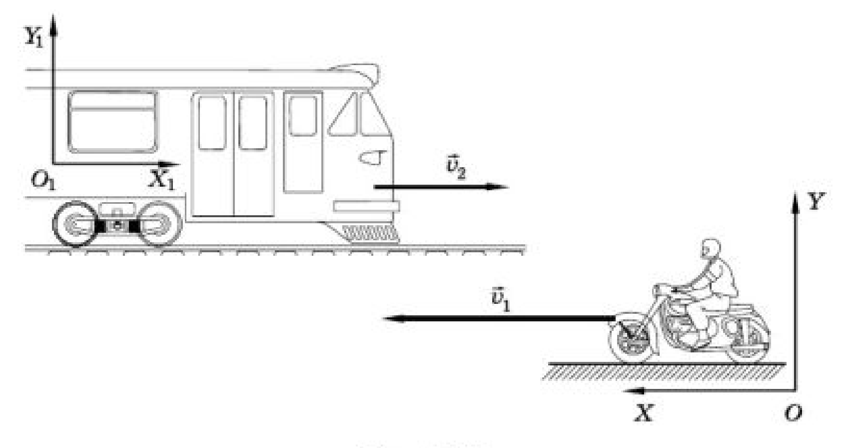


Рис. 1.95

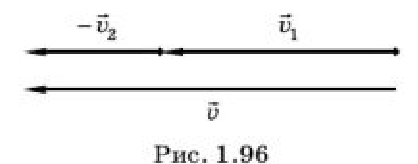


Рис. 1.96

Отсюда $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Выполним вычитание векторов геометрически. Из рисунка 1.96 видно, что $v = v_1 + v_2$, поэтому

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 20 \text{ с.}$$

2. Решим ту же задачу, изменив выбор систем координат: неподвижную систему координат XOY свяжем с поездом, а подвижную $X_1O_1Y_1$ — с Землёй. Теперь в системе координат XOY Земля движется навстречу поезду со скоростью $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$, т. е. переносная скорость $\vec{v}_п = -\vec{v}_2$ (рис. 1.97). Мотоциклист перемещается относительно подвижной системы координат (Земли). Поэтому его скорость в данном случае является относительной: $\vec{v}_{от} = \vec{v}_1$. Скорость же мотоциклиста относительно системы координат XOY (поезда) абсолютна, т. е. $\vec{v}_а = \vec{v}$.

Согласно закону сложения скоростей, будем иметь $\vec{v}_а = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п$, или $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Мы пришли к тому же результату, что и при первом способе выбора систем координат. Результат вычитания векторов опять такой же, как на рисунке 1.96. Поэтому $v = v_1 + v_2$ и $t = 20$ с.

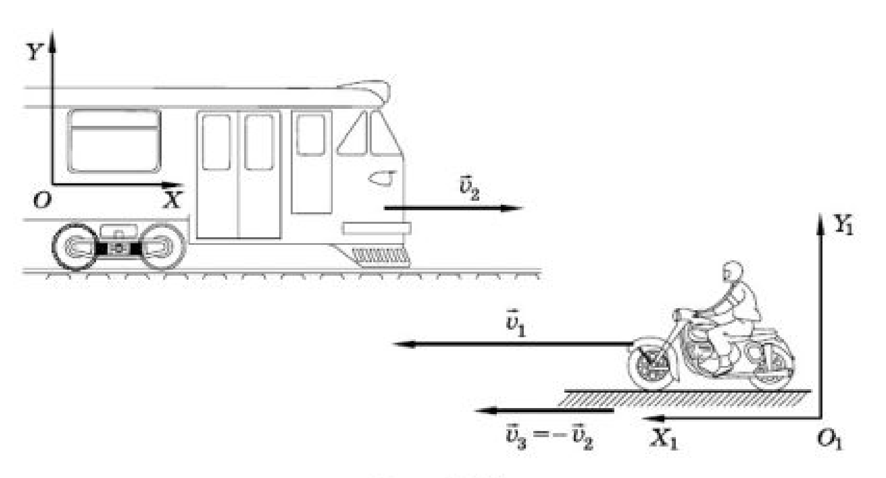


Рис. 1.97

3. Можно неподвижную систему координат связать с мотоциклистом, а подвижную — с Землёй. Рассмотрите самостоятельно этот вариант решения. Безусловно, вы придёте к тому же результату.

Задача 2

Капли дождя падают относительно Земли отвесно со скоростью $v_1 = 20$ м/с. С какой наименьшей скоростью v_2 относительно Земли должен двигаться автомобиль, чтобы на заднем смотровом стекле, наклонённом под углом 45° к горизонту, не оставалось следов капель? Чему равна скорость капель относительно автомобиля? Завихрения воздуха не учитывать.

Решение. 1. Капли дождя не будут задевать стёкла автомобиля, если вектор скорости капель относительно автомобиля направлен параллельно стеклу. Этим определяется минимальная скорость автомобиля. Чтобы найти её, воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}.$$

Систему кординат XOY свяжем с Землёй и будем считать её неподвижной. Движущуюся систему координат $X_1O_1Y_1$ свяжем с автомобилем (рис. 1.98). Обозначим скорость капель относительно автомобиля через $\vec{v}$. Тогда

$$\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_1, \quad \vec{v}_{\text{от}} = \vec{v}, \quad \vec{v}_{\text{п}} = \vec{v}_2.$$

Следовательно, закон сложения скоростей запишется так:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2.$$

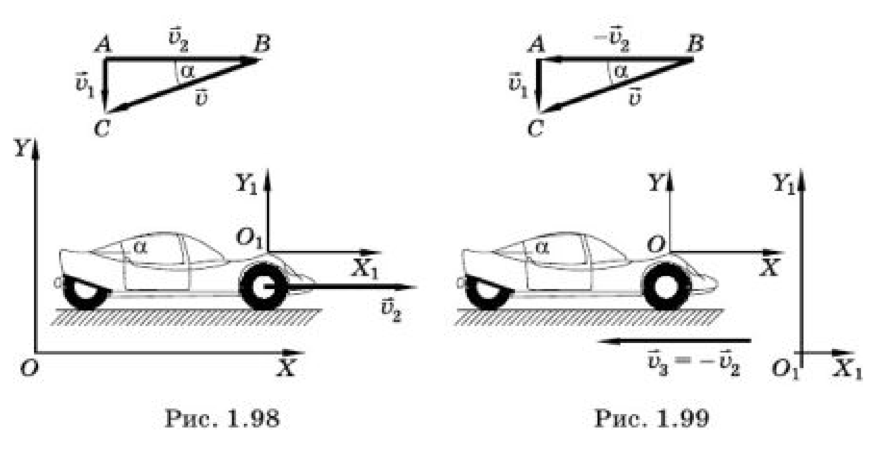


Рис. 1.98　　　Рис. 1.99

Отсюда

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Вычитание векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ показано на рисунке 1.98 ($\triangle ABC$). Поскольку треугольник ABC — прямоугольный и $\angle ABC = \alpha$, то $v = \frac{v_1}{\sin \alpha}$ и $v_2 = v_1 \text{ctg}\, \alpha$; $v = \frac{20 \text{ м/с}}{\sin 45°} \approx 28$ м/с и $v_2 = v_1 = 20$ м/с.

2. Решим эту задачу, связав неподвижную систему координат XOY с автомобилем, а подвижную $X_1O_1Y_1$ — с Землёй (рис. 1.99). В этом случае относительно системы координат XOY Земля движется навстречу автомобилю со скоростью $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$. Так как $\vec{v}_\text{а} = \vec{v}$, $\vec{v}_\text{п} = -\vec{v}_2$, $\vec{v}_\text{от} = \vec{v}_1$, то закон сложения скоростей запишется следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2).$$

Сложение векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$ показано на рисунке 1.99.

Мы пришли к тому же результату, что и при первом способе решения задачи:

$$v_2 = v_1 = 20 \text{ м/с} \ \text{ и } \ v \approx 28 \text{ м/с}.$$

Задача 3

Два корабля идут пересекающимися курсами. В некоторый момент времени расстояние между ними $l = 10$ км, а скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ образовывали с прямой, соединяющей корабли, углы $\alpha = 45°$ (рис. 1.100). На каком минимальном расстоянии друг от друга пройдут корабли? Модули скоростей кораблей относительно воды $v_1 = 60$ км/ч, $v_2 = 80$ км/ч. Считайте, что морские течения отсутствуют.

Решение. Пусть в начальный момент времени первый корабль находился в точке A, а второй — в точке B (рис. 1.101).

Перейдём в систему координат, связанную с первым кораблём. Тогда скорость воды относительно этой системы $\vec{v}_\text{п} = -\vec{v}_1$ является переносной скоростью, а скорость второго корабля относительно воды есть относительная скорость $\vec{v}_\text{от} = \vec{v}_2$. Скорость второго корабля относительно первого при данном выборе системы отсчёта будет абсолютной скоростью $\vec{v}_\text{а}$. По закону сложения скоростей $\vec{v}_\text{а} = \vec{v}_\text{от} + \vec{v}_\text{п}$ или

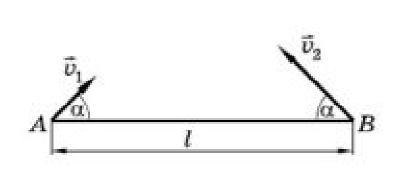


Рис. 1.100

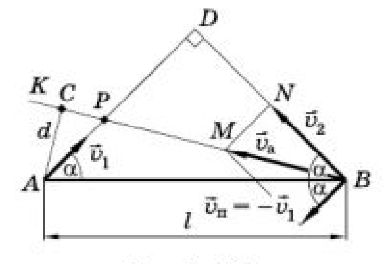


Рис. 1.101

$\vec{v}_а = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$ (см. рис. 1.101). Прямая BK — траектория второго корабля в системе отсчёта, связанной с первым («неподвижным») кораблём. Кратчайшим расстоянием между кораблями будет длина перпендикуляра AC, опущенного из точки A на прямую BK.

Из прямоугольного треугольника, образованного векторами скоростей, находим модуль скорости $\vec{v}_а$ по теореме Пифагора:

$$v_а = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 100 \text{ км/ч}.$$

Дальнейшее решение задачи является чисто геометрическим. Треугольник ADB прямоугольный и равнобедренный. Найдём длину его катета: $AD = DB = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$. Из подобия треугольников BMN и BPD найдём $PD = \dfrac{DBv_п}{v_2}$. Вычислим длину отрезка $AP = AD - PD = \dfrac{AD(v_2 - v_п)}{v_2}$, где $v_п = v_1$.

Из подобия треугольников APC и BMN находим искомое расстояние $d = AC$:

$$\frac{d}{AP} = \frac{v_2}{v_а}, \quad d = \frac{l(v_2 - v_1)}{\sqrt{2(v_2^2 + v_1^2)}} \approx 1{,}4 \text{ км}.$$

Проанализируем различные частные случаи.

Если $v_2 = v_1$, то $d = 0$; корабли встретятся в точке D. Если относительно воды движется только один корабль ($v_1 = 0$, или $v_2 = 0$), то $d = \dfrac{l}{\sqrt{2}} = AD$.

Найти расстояние d можно из $\triangle ACB$: $d = l \sin \angle CBA$, где $\angle CBA \approx 8°$. Действительно, из $\triangle NBM$ находим $\sin \angle NBM =$

$= \frac{\upsilon_1}{\upsilon_a} = 0{,}6$. Отсюда $\angle NBM = 37°$. Так как $\angle CBA = 45° - 37° = 8°$, то

$$d = 10 \text{ км} \cdot \sin 8° \approx 1{,}4 \text{ км}.$$

Задача 4

Вагон A движется по закруглению радиусом $O_1A = 0{,}3$ км, а вагон B — прямолинейно (рис. 1.102, *а*). Найдите скорость вагона B относительно вагона A в момент, когда расстояние $AB = 0{,}1$ км. Скорость каждого вагона относительно Земли равна 60 км/ч.

Решение. Так как необходимо найти скорость вагона B относительно вагона A, то целесообразно (но необязательно) связывать с вагоном A неподвижную систему координат XOY. В этой системе вагон A не движется, но поверхность Земли под ним поворачивается по часовой стрелке вокруг точки O_1 с угловой скоростью ω (рис. 1.102, *б*).

Систему координат $X_1O_1Y_1$ свяжем с Землёй. Эта система координат вращается вместе с поверхностью Земли с угловой скоростью ω вокруг точки O_1.

Угловую скорость ω определим по движению вагона A относительно Земли: $\upsilon_A = \omega \cdot O_1A$. Отсюда $\omega = \frac{\upsilon_A}{O_1A}$.

При вращательном движении подвижной системы координат переносная скорость в каждый момент времени является той линейной скоростью, которую в данной точке пространства имеет вращающаяся система координат, связанная с Землёй. Для вагона B переносной скоростью $\vec{\upsilon}_п$

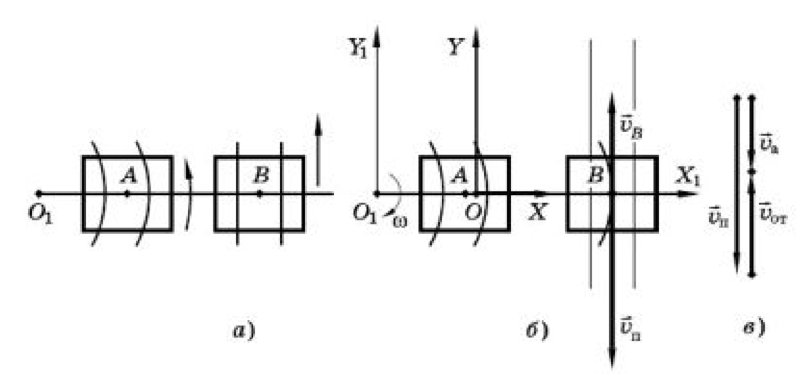


Рис. 1.102

является скорость точки оси X_1 на расстоянии O_1B от точки O_1. Найдём модуль этой скорости:

$$\upsilon_п = \omega \cdot O_1B = \omega(O_1A + AB) = \upsilon_A + \upsilon_A \frac{AB}{O_1A}.$$

Скорость вагона B относительно поверхности Земли (относительно подвижной системы координат $X_1O_1Y_1$) $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_{от}$ ($\upsilon_B = \upsilon_A$ по условию), но по отношению к вагону A (неподвижной системе координат XOY) скорость вагона B является абсолютной. Эту скорость мы найдём по закону сложения скоростей:

$$\vec{\upsilon}_а = \vec{\upsilon}_{от} + \vec{\upsilon}_п.$$

Сложение скоростей выполнено на рисунке 102, *в*. Из рисунка видно, что вагон B относительно вагона A движется в сторону, противоположную скорости вагона B относительно Земли, со скоростью $\vec{\upsilon}_а$, модуль которой равен

$$\upsilon_а = \upsilon_п - \upsilon_{от} = \upsilon_п - \upsilon_A = \left(\upsilon_A + \upsilon_A \frac{AB}{O_1A}\right) - \upsilon_A = \upsilon_A \frac{AB}{O_1A} = 20 \text{ км/ч}.$$

Задача 5

Вверх по реке на вёсельной лодке плывёт рыбак. Проплывая под мостом, он уронил удочку, но заметил это лишь полчаса спустя. Рыбак повернул назад и нагнал удочку на расстоянии 1,5 км от моста. Чему равна скорость течения реки, если рыбак грёб одинаково интенсивно как при движении вверх (против течения), так и при движении вниз (по течению)?

Решение. 1. Решим задачу, выбрав в качестве неподвижной систему отсчёта, связанную с берегом. Подвижную систему свяжем с водой. Скорость этой системы является переносной, а скорость лодки относительно воды (подвижной системы) — относительной. Модуль этой скорости одинаков при движении лодки в любом направлении. Модуль абсолютной скорости при движении лодки против течения $\upsilon'_а = \upsilon_{от} - \upsilon_п$, а по течению $\upsilon_а = \upsilon_{от} + \upsilon_п$.

Ось X направим по течению, начало координат совместим с мостом (рис. 1.103). Скорость удоч-

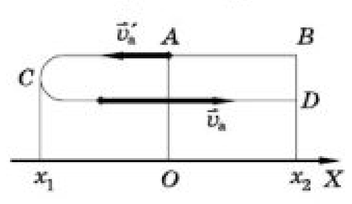


Рис. 1.103

ки равна скорости течения реки $\upsilon_п$. Спустя время t удочка совершит перемещение AB и будет иметь координату $x_2 = \upsilon_п t$, где $x_2 = 1{,}5$ км.

Обозначим через $t_1 = 0{,}5$ ч время движения лодки от моста до поворота (точка C). Координату этой точки обозначим x_1. Через t_2 обозначим время движения лодки по течению от точки C до точки D. Тогда

$$t = t_1 + t_2. \qquad (1.31.1)$$

Запишем выражение для координаты x_1:

$$x_1 = \upsilon'_{ax} t_1 = -\upsilon'_a t_1 = (\upsilon_п - \upsilon_{от})t_1.$$

Уравнение координаты лодки x_2 при её движении по течению имеет вид

$$x_2 = x_1 + (\upsilon_п + \upsilon_{от})t_2.$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{x_2 - x_1}{\upsilon_п + \upsilon_{от}}. \qquad (1.31.2)$$

Подставив это выражение в (1.31.1) и учитывая, что $t = \frac{x_2}{\upsilon_п}$, получим

$$\frac{x_2}{\upsilon_п} = t_1 + \frac{x_2 + (\upsilon_{от} - \upsilon_п)t_1}{\upsilon_{от} + \upsilon_п}.$$

Отсюда

$$\upsilon_п = \frac{x_2}{2t_1} = 1{,}5 \text{ км/ч}.$$

2. Решение задачи будет значительно проще, если в качестве неподвижной системы выбрать систему отсчёта, связанную с водой. В этой системе модуль скорости лодки при движении по всем направлениям одинаков, так как рыбак работает вёслами всё время одинаково. Поэтому если рыбак 0,5 ч удаляется от удочки, то и догонять её он будет 0,5 ч. Следовательно, удочка была в движении 1 ч и проплыла 1,5 км относительно берега. Поэтому скорость течения воды относительно берега равна 1,5 км/ч.

Упражнение 6

1. Два автобуса движутся в одном направлении. Модули их скоростей соответственно равны 90 и 60 км/ч. Чему рав-

на скорость первого автобуса относительно второго и второго относительно первого?

2. По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу движутся два поезда со скоростями 72 и 108 км/ч. Длина первого поезда 800 м, а второго 200 м. В течение какого времени один поезд проходит мимо другого?

3. Скорость течения реки $\upsilon_1 = 1,5$ м/с. Каков модуль скорости υ катера относительно воды, если катер движется перпендикулярно берегу со скоростью $\upsilon_2 = 2$ м/с относительно него?

4. Какую скорость относительно воды должен сообщить мотор катеру, чтобы при скорости течения реки, равной 2 м/с, катер двигался перпендикулярно берегу со скоростью 3,5 м/с относительно берега?

5. Капли дождя падают относительно Земли отвесно со скоростью 30 м/с. С какой наименьшей скоростью относительно Земли должен ехать автомобиль, чтобы на заднем смотровом стекле, наклонённом под углом 60° к горизонту, не оставалось следов капель? Завихрения воздуха не учитывать.

6. Эскалатор метро спускает идущего по нему человека за 1 мин. Если человек будет идти вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени будет спускаться человек, стоящий на эскалаторе?

7. Гусеничный трактор движется со скоростью 72 км/ч относительно Земли. Чему равны относительно Земли модули скоростей: а) верхней части гусеницы; б) нижней части гусеницы; в) части гусеницы, которая в данный момент движется вертикально по отношению к трактору?

8. Человек спускается по эскалатору. В первый раз он насчитал 50 ступенек. Во второй раз, двигаясь со скоростью вдвое большей, он насчитал 75 ступенек. В какую сторону движется эскалатор? Сколько ступенек насчитает человек, спускаясь по неподвижному эскалатору?

9. Плот от Нижнего Новгорода до Астрахани плывёт 5 сут, а обратно 7 сут. Сколько времени от Нижнего Новгорода до Астрахани плывёт плот?

10. Скорость течения реки возрастает пропорционально расстоянию от берега, достигая своего максимального значения $\upsilon_0 = 5$ м/с на середине реки. У берегов скорость течения равна нулю. Лодка движется по реке так, что её

скорость относительно воды постоянна, равна по модулю $u = 10$ м/с и направлена перпендикулярно течению. Найдите расстояние, на которое будет снесена лодка при переправе, если ширина реки $d = 100$ м. Определите траекторию лодки.

11. Скорость течения реки возрастает с расстоянием от берега, достигая своего максимального значения $v_0 = 5$ м/с на середине реки. У берегов скорость течения равна нулю. От берега начинает плыть спортсмен со скоростью $v = 4$ м/с относительно воды, направленной перпендикулярно течению. Стоявшая на середине реки на якоре лодка начинает двигаться параллельно берегу с постоянной относительно воды скоростью $u = 10$ м/с одновременно с пловцом. На каком расстоянии от места встречи с пловцом находилась первоначально лодка, если ширина реки $h = 100$ м?

12. Платформа движется со скоростью $v_1 = 40$ м/с. В момент, когда она пересекала прямую линию OM, перпендикулярную направлению движения (рис. 1.104), с платформы был произведён выстрел по неподвижной цели M. Зная, что скорость пули относительно платформы $v_2 = 800$ м/с, найдите направление, в котором был произведён выстрел.

13. Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси с угловой скоростью 2 рад/с (рис. 1.105). Кубик M движется со скоростью 9 м/с в направлении MO. В некоторый момент времени расстояние $MO = 6$ м. Найдите скорость кубика относительно наблюдателя, стоящего в центре платформы в этот момент времени.

14. Шоссейные дороги пересекаются под прямым углом. По дорогам движутся автомобили со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в направлении к перекрёстку ($v_1 > v_2$). В некоторый момент времени расстояние обоих автомобилей до перекрёстка было одинаковым и равным l. На каком наименьшем расстоянии d автомобили прошли относительно друг друга?

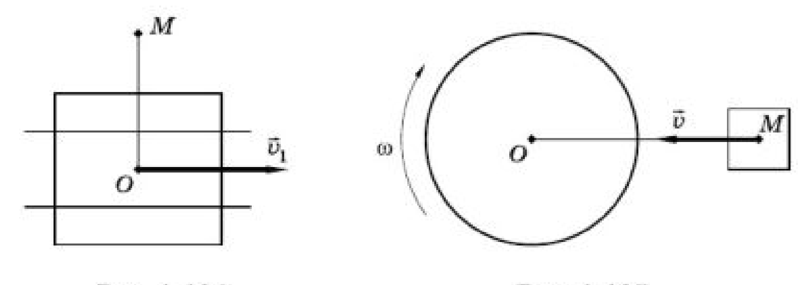


Рис. 1.104 Рис. 1.105

15. Человек на лодке должен попасть из точки A в точку B, находящуюся на противоположном берегу реки (рис. 1.106). Расстояние $BC = a$. Ширина реки $AC = b$. С какой наименьшей скоростью u относительно воды должна плыть лодка, чтобы попасть в точку B? Скорость течения реки постоянна и равна v.

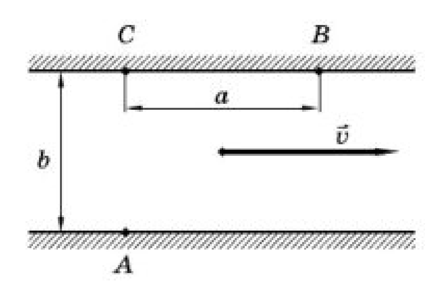


Рис. 1.106

16. Лифт движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх. Человек, находящийся в лифте, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно лифта? Решите задачу также для случая, когда ускорение лифта направлено вниз.

---

1. Определите свою систему координат. От каких параметров зависит ваше местоположение в данной системе координат? Абсолютные или относительные эти величины? Подчиняются ли выделенные вами параметры преобразованиям Галилея?

2. Проведите параллели между выражениями «цель оправдывает средства» и «всё в этом мире относительно».

ДИНАМИКА

Глава 2

ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

При изучении различных движений в кинематике: равномерного прямолинейного движения, движения с постоянным ускорением и т. д. — мы не интересовались, почему в каждом конкретном случае происходит именно это движение, а не другое. Что является причиной движения вообще и изменения скорости в частности? На эти вопросы отвечает специальный раздел механики — динамика. В основе динамики лежат три закона Ньютона. Изучить их — наша задача.

§ 2.1. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ МЕХАНИКИ

Механика — достаточно сложная наука. Но главное её утверждение можно представить в одной фразе (см. с. 153).

Законам механики подчиняются движения всех окружающих нас тел.

Для того чтобы открыть эти законы, Ньютону не потребовались какие-либо сложные приборы. Достаточными оказались простые опыты. Главная трудность состояла в том, чтобы в огромном разнообразии движений тел увидеть то существенное, то общее, что определяет движение каждого тела.

Законы механики, как и все основные законы физики, имеют точную количественную форму. Но вначале мы попытаемся понять эти законы качественно. Так будет проще уловить главное содержание механики Ньютона. После этого перейдём к количественной формулировке законов механики.

Выбор системы отсчёта

Мы уже знаем, что любое движение следует рассматривать по отношению к определённой системе отсчёта.

В кинематике, т. е. при описании движения без рассмотрения причин его изменения, все системы отсчёта равноправны. Выбор определённой системы отсчёта для решения той или иной задачи диктуется соображениями целесообразности и удобства. Так, при стыковке космических кораблей удобно рассматривать движение одного из них относительно другого, а не относительно Земли.

В главном разделе механики — динамике — рассматриваются взаимные действия тел друг на друга, являющиеся причиной изменения движения тел, т. е. их скоростей.

Можно сказать, что если кинематика отвечает на вопрос: «Как движется тело?», то динамика выясняет, почему именно так.

Вопрос о выборе системы отсчёта в динамике не является простым. Выберем вначале на первый взгляд естественную систему отсчёта — систему, связанную с земным шаром. Движение тел вблизи поверхности Земли будем рассматривать относительно самой Земли.

Что вызывает ускорение тел?

Если тело, лежащее на земле, на полу или на столе, начинает двигаться, то всегда по соседству можно обнаружить предмет, который толкает это тело, тянет или действует на него на расстоянии (например, магнит на железный шарик). Поднятый над землёй камень не остаётся висеть в воздухе, а падает. Надо думать, что именно действие Земли приводит к этому.

Вся совокупность подобных опытных фактов говорит о том, что **изменение скорости тела (т. е. ускорение) всегда вызывается воздействием на данное тело каких-либо других тел.** Эта фраза содержит самое главное утверждение механики Ньютона.

Может оказаться, что тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, т. е. без ускорения ($a = 0$), хотя на него и действуют другие тела. Но если на тело не действуют другие тела, то скорость тела никогда не меняется.

Когда на столе лежит книга, то её ускорение равно нулю, хотя действие со стороны других тел налицо. На книгу действуют притяжение Земли и стол, не дающий ей падать вниз.

В этом случае говорят, что действия уравновешивают друг друга. Но книга никогда не придёт в движение, не получит

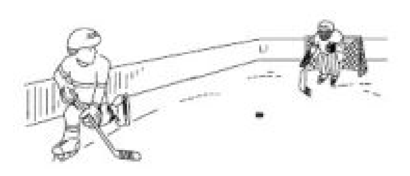


Рис. 2.1

ускорение, если на неё не подействовать рукой, сильной струёй воздуха или ещё каким-либо способом.

Перечислять экспериментальные доказательства того, что изменение скорости одного тела всегда вызывается действием на него других тел, нет никакой возможности, да и особой необходимости. Действие тел друг на друга вы можете наблюдать на каждом шагу. Но только наблюдать надо уметь.

Футболист ударил по мячу. Ударил — значит, его нога оказала определённое воздействие на мяч, и скорость мяча увеличилась. А вот какое действие позволяет футболисту быстро устремиться к воротам противника? Одного желания здесь мало. Будь вместо футбольного поля идеально гладкий лёд, а на ногах футболиста вместо бутс с шипами тапочки с гладкой подошвой, это ему не удалось бы. Для того чтобы бежать с ускорением, нужно упираться ногами в землю. Если ноги будут скользить, футболист никуда не убежит. Только трение о землю, действие со стороны земли на ноги футболиста позволяют ему, да и всем нам при беге и ходьбе изменять свою скорость. Точно так же, чтобы остановиться с разбега, надо упираться ногами в землю.

Любой человек из своего опыта знает, что заставить какой-либо предмет изменить скорость (по числовому значению или направлению) можно, только оказав на него определённое воздействие. Трудно заподозрить учеников, скажем, 5 класса, гоняющих шайбу, в знакомстве с законами механики Ньютона. Но поступают они правильно. Они стараются, действуя клюшкой на шайбу, так изменить движение шайбы, чтобы она двигалась в нужном направлении: к воротам противника (рис. 2.1) или к партнёру по команде, находящемуся в выгодном положении.

Движение с постоянной скоростью

Не следует думать, что основное утверждение механики совершенно очевидно и уяснить его ничего не стоит.

Если действий со стороны других тел на данное тело нет, то, согласно основному утверждению механики, ускорение

тела равно нулю, т. е. тело будет покоиться или двигаться с постоянной скоростью.

Вот этот-то факт совсем не является само собой разумеющимся. Понадобился гений Галилея и Ньютона, чтобы его осознать. Ньютону вслед за Галилеем удалось окончательно развеять одно из глубочайших убеждений человечества о законах движения тел.

Начиная с великого древнегреческого философа Аристотеля, на протяжении почти двадцати веков все были убеждены, что для поддержания постоянной скорости тела необходимо, чтобы что-то (или кто-то) воздействовало на него, т. е. тело нуждается для поддержания своего движения в действиях, производимых на тело извне, в некоторой активной причине; думали, что без такой поддержки тело обязательно остановится.

Аристотель считал покой относительно Земли естественным состоянием тела, не требующим особой причины. Ведь Земля в то время считалась центром мироздания. Без активной причины тело возвращается в своё естественное состояние покоя.

Это, казалось бы, находит подтверждение в нашем повседневном опыте. Например, автомобиль с выключенным двигателем останавливается и на совершенно горизонтальной дороге. То же самое можно сказать о велосипеде, лодке на воде, бильярдных шарах и любых других движущихся те-

---



Галилео Галилей (1564—1642) — великий итальянский физик и астроном, впервые применивший экспериментальный метод исследования в науке.

Галилей открыл принцип относительности, ввёл понятие инерции, исследовал законы падения тел и движения тел по наклонной плоскости, предложил применять маятник для измерения времени.

Впервые в истории человечества с помощью изготовленной им зрительной трубы Галилей открыл горы на Луне, спутники Юпитера, звёздное строение Млечного Пути, пятна на Солнце, фазы Венеры.

Галилей развил запрещённое в те времена церковью учение Коперника о движении Земли, за что в 1633 г. был осуждён римским католическим судом. Приговор был отменён Ватиканом 350 лет спустя.

лах. Вот почему даже в наше время можно встретить людей, которые смотрят на движение так же, как смотрел Аристотель. Кажется нелепым движение повозки с постоянной скоростью, но без лошади!

В действительности же свободное тело, т. е. тело, которое не взаимодействует с другими телами, могло бы сохранять свою скорость постоянной сколь угодно долго или находиться в покое. Только действие со стороны другого тела способно изменить его скорость. Действовать на тело, чтобы поддерживать его скорость постоянной, нужно лишь потому, что в обычных условиях всегда существует сопротивление движению со стороны земли, воздуха или воды. Если бы не было этого сопротивления, то скорость автомобиля на горизонтальном шоссе и при выключенном двигателе оставалась постоянной.

Более глубокий взгляд на сущность механики

Мы выяснили, что скорость тела изменяется вследствие воздействия на него окружающих тел. Это означает, что ускорение тела в данный момент времени однозначно определяется расположением окружающих тел и в общем случае их скоростями относительно данного тела. Очень важно понять, что ускорение при фиксированном положении окружающих тел не может быть любым: его значение диктуется законами природы и не зависит от того, что происходило с телом в предшествующие моменты времени.

К скорости тела этот вывод не относится. Вектор скорости не определяется однозначно воздействием окружающих тел и в данный момент в данной точке пространства может быть любым в зависимости от того, что происходило с телом в предшествующие моменты времени.

Координаты тела также не определяются воздействием других тел единственным образом. В данный момент времени при фиксированном положении окружающих тел координаты тела могут быть любыми в зависимости от того, как двигалось тело перед этим (т. е. координаты зависят от начальных условий).

Например, при падении камня на землю его ускорение в каждой точке пространства определяется однозначно притяжением к Земле (и скоростью относительно воздуха, если сопротивление существенно). Скорость же тела в данной точке может быть любой и зависит от того, как было броше-

но тело: кто бросал (сильный или слабый), когда бросал, куда метил и т. д. (рис. 2.2).

Координаты камня в данный момент времени также могут быть любыми.

Короче говоря, наш мир устроен так, что ускорения тел строго определяются законами природы (законами механики Ньютона). Скорость же и координаты тела в данный момент времени зависят от того, что происходило с телом перед этим (от начальных условий), т. е. законами природы не определяются.

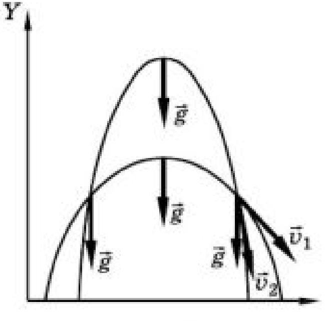


Рис. 2.2

К этому вопросу мы ещё вернёмся в § 2.9.

Инерциальная система отсчёта

До сих пор систему отсчёта связывали с Землёй, т. е. рассматривали движение относительно Земли. В системе отсчёта, связанной с Землёй, ускорение тела определяется действием на него других тел. Подобные системы отсчёта называются инерциальными.

Однако в других системах отсчёта может оказаться, что тело имеет ускорение даже в том случае, когда на него другие тела не действуют.

В качестве примера рассмотрим систему отсчёта, связанную с движущимся автобусом. При резком торможении автобуса стоящие в проходе пассажиры падают вперёд, получая ускорение относительно стенок автобуса (рис. 2.3). Однако это ускорение не вызвано каким-либо воздействием со стороны Земли или автобуса непосредственно на пассажиров. Относительно Земли пассажиры сохраняют свою постоянную скорость, но так как автобус замедляет своё движение, то люди наклоняются к его передней стенке.

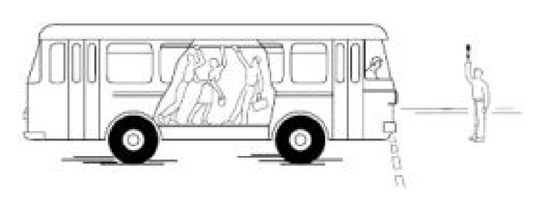


Рис. 2.3

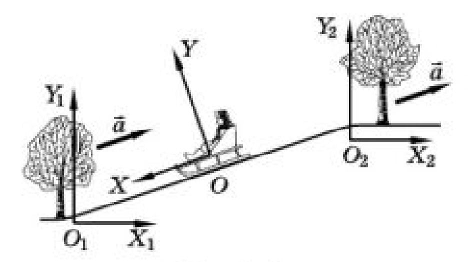


Рис. 2.4

Таким образом, когда на пассажира не действуют другие тела, он не получает ускорения в системе отсчёта, связанной с Землёй, но относительно системы отсчёта, связанной со стенками автобуса, движущегося замедленно, пассажир имеет ускорение, направленное вперёд.

Такой же результат получится, если связать систему отсчёта с движущейся каруселью. Относительно карусели все тела, лежащие на земле, будут описывать окружности, т. е. будут двигаться с ускорением, хотя никаких внешних действий, вызывающих это ускорение, обнаружить нельзя.

Ещё пример. Как объяснит мальчик, скатывающийся на санках с горы, что дерево на вершине горы, да и сама гора удаляются от него всё быстрее и быстрее, т. е. с ускорением? Никаких видимых причин для этого нет, но факт ускорения налицо (рис. 2.4).

Если относительно какой-нибудь системы отсчёта тело движется с ускорением, не вызванным действием на него других тел, то такую систему называют **неинерциальной**. Так, неинерциальными являются системы отсчёта, связанные с автобусом, движущимся по отношению к поверхности земли с ускорением, или с вращающейся каруселью.

В неинерциальных системах отсчёта основное утверждение механики не выполняется.

Основное утверждение механики надо постараться понять и запомнить. Попробуйте проследить за его справедливостью, наблюдая в течение дня движение тел вокруг вас. Почему меняются скорости этих тел?

? **1.** Зачем при описании движения тел понадобилось введение инерциальной системы отсчёта?

2. Имеется ли принципиальное отличие системы отсчёта, связанной с Землёй, от системы отсчёта, связанной с самолётом, делающим вираж?

§ 2.2. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

Точку, движение которой мы рассматривали в кинематике, можно считать просто математической точкой. В динамике тоже рассматривается движение точки, но уже не математической, а материальной. Что это такое?

Возьмите лист плотной бумаги и подбросьте его. Он начнёт медленно опускаться, слегка раскачиваясь из стороны в сторону. Если же этот лист скомкать, то он будет падать без раскачивания и гораздо быстрее. Обыкновенный волчок, состоящий из диска, насаженного на тонкую палочку, способен кружиться, не падая набок, пока скорость вращения велика. Заставить же вести себя подобным образом диск и палочку по отдельности просто невозможно.

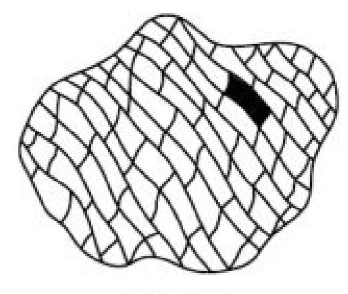
С помощью подобных простых наблюдений нетрудно убедиться, что движение тел сильно зависит от их размеров и формы. Чем сложнее форма тела, тем, как правило, сложнее его движение. Трудно поэтому надеяться сразу найти какие-либо общие законы движения, которые были бы непосредственно справедливы для тел произвольной формы.

Основные законы механики Ньютона относятся не к произвольным телам, а к материальной точке: к телу, обладающему массой, но лишённому геометрических размеров.

Однако тел, обладающих массой, но лишённых геометрических размеров, в природе нет. В чём же тогда смысл этого понятия? В кинематике мы познакомились со способами описания движения точки. Под точкой понимались либо маленькая метка на теле, либо же само тело в том случае, когда пройденный им путь был много больше размеров тела. В динамике последнего уже недостаточно. Так, вращающееся колесо нельзя рассматривать как точку, какое бы большое расстояние ни прошло это колесо вместе с автомобилем.

Но размеры и форма тела во многих случаях не оказывают сколько-нибудь существенного влияния на характер механического движения. Вот в этих случаях мы и можем рассматривать тело как материальную точку, т. е. считать, что оно обладает массой, но не имеет геометрических размеров.

Причём одно и то же тело в одних случаях можно считать точкой, а в других нет. Всё зависит от условий, при которых происходит движение тела, и от того, что именно нас интересует. Например, при изучении орбитального движения пла-


Рис. 2.5

нет вокруг Солнца и планеты, и Солнце можно считать материальными точками, так как расстояние между ними много больше их собственных размеров, а при этих условиях взаимодействие между телами не зависит заметным образом от формы тел. Но на движение искусственных спутников Земли форма Земли уже оказывает заметное влияние.

Ещё один важный пример. При движении твёрдого тела, например кубика, соскальзывающего с доски, все части кубика движутся совершенно одинаково (такое движение называется поступательным). Поэтому кубик можно рассматривать как точку с массой, равной массе кубика. Но если тот же кубик вращается, считать его точкой нельзя: его разные части имеют существенно различные скорости.

Как быть в тех многочисленных случаях, когда тело нельзя считать материальной точкой? Выход есть, и он в принципе совсем несложен. Тело можно мысленно разделить на столь малые элементы, что каждый из них допустимо считать материальной точкой (рис. 2.5).

В механике любое тело можно рассматривать как совокупность большого числа материальных точек. Зная законы движения точки, мы в принципе располагаем методом описания движения произвольного тела.

Материальная точка — это простейшая модель реального тела. Если тело можно рассматривать как материальную точку, то задача исследования движения тела существенно упрощается.

? Можно ли считать материальной точкой камень, брошенный вверх?

§ 2.3. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Сейчас вы окончательно убедитесь в том, что движение есть столь же естественное состояние любого тела, как и покой, а потому не требует никакой причины.

Первый закон механики, или закон инерции, как его часто называют, был установлен ещё Галилеем. Но строгую формулировку этого закона дал и включил его в число основ-

ных законов механики Ньютон. Закон инерции относится к самому простому случаю движения — движению тела, на которое не оказывают воздействия другие тела. Такие тела называются *свободными телами*.

Движение свободного тела

Ответить на вопрос, как движутся свободные тела, не обращаясь к опыту, нельзя. Однако нельзя поставить ни одного опыта, который бы в чистом виде показал, как движется ни с чем не взаимодействующее тело, так как таких тел нет. Как же быть?

Имеется лишь один выход. Надо создать для тела условия, при которых влияние внешних воздействий можно делать всё меньшим и меньшим, и наблюдать, к чему это ведёт. Можно, например, наблюдать за движением гладкого камня на горизонтальной поверхности, после того как ему сообщена некоторая скорость. (Притяжение камня к земле уравновешивается действием поверхности, на которую он опирается[1], и на скорость его движения влияет только трение.)

При этом легко обнаружить, что чем более гладкой является поверхность, тем медленнее будет уменьшаться скорость камня. На гладком льду камень скользит весьма долго, заметно не меняя скорость. Трение можно свести почти на нет с помощью воздушной подушки — струй воздуха, поддерживающих тело над твёрдой поверхностью, вдоль которой происходит движение. Этот принцип используется в водном транспорте (суда на воздушной подушке). На основе подобных наблюдений можно заключить: если бы поверхность была идеально гладкой, то при отсутствии сопротивления воздуха (в вакууме) камень совсем не менял бы своей скорости. Именно к такому выводу впервые пришёл Галилей.

Вместе с тем нетрудно заметить, что, когда скорость тела меняется, всегда обнаруживается воздействие на него других тел (см. § 2.1).

Отсюда можно прийти к выводу, что тело, достаточно удалённое от других тел и по этой причине не взаимодействующее с ними, движется с постоянной скоростью.

---

[1] Если бы можно было убрать поверхность, по которой скользит тело, и «убрать» земной шар, то движение и в этом случае продолжалось бы с постоянной скоростью. Такое утверждение стало возможным лишь после того, как Земля «потеряла» своё привилегированное положение во Вселенной. Если Земля — «рядовое» космическое тело, то и состояние покоя по отношению к нему не является каким-то особым состоянием.

Самое простое движение

Несомненно, что движение свободного тела — это самый простой случай движения, не осложнённого внешними влияниями. А как наиболее простое движение описывается математически и каким оно будет? Каждый согласится, что это равномерное прямолинейное движение, описываемое формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \text{ где } \vec{v} = \text{const}.$$

Знаменательное совпадение: физически наиболее простой случай движения (движение свободного тела) происходит по самому простому математическому закону (движение по прямой с постоянной скоростью). Это соображение, надо полагать, примирит вас с мыслью о том, что движение с постоянной скоростью, как и покой, — это естественное состояние тела, и оно не нуждается во внешней побудительной причине.

Закон инерции и относительность движения

Движение относительно, поэтому имеет смысл говорить лишь о движении тела по отношению к системе отсчёта, связанной с другим телом. Сразу же возникает вопрос: будет ли свободное тело двигаться с постоянной скоростью по отношению к любому другому телу? Ответ, конечно, отрицательный. Так, если по отношению к Земле свободное тело движется прямолинейно и равномерно, то по отношению к вращающейся карусели тело заведомо так двигаться не будет.

Формулировка первого закона Ньютона

Наблюдения за движениями тел и размышления о характере этих движений приводят нас к заключению о том, что свободные тела движутся с постоянной скоростью по крайней мере по отношению к определённым телам и связанным с ними системам отсчёта. Например, по отношению к Земле. В этом состоит главное содержание закона инерции. Поэтому первый закон динамики может быть сформулирован так:

существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых тела, достаточно удалённые от всех других тел, движутся равномерно и прямолинейно.

Этот закон, с одной стороны, содержит *определение* инерциальной системы отсчёта — системы отсчёта, относи-

тельно которой свободные тела имеют постоянную скорость. С другой стороны, он содержит утверждение (которое с той или иной степенью точности можно проверить на опыте) о том, что инерциальные системы существуют в действительности. Первый закон механики ставит в особое, привилегированное положение инерциальные системы отсчёта.

В инерциальной системе свободное тело может вращаться. В этом случае считать его материальной точкой нельзя. Любая часть тела движется с ускорением. Это ускорение сообщают ей воздействия со стороны остальных частей тела. Иными словами, часть вращающегося тела не является «свободным телом» и к ней первый закон Ньютона неприменим.

Примеры инерциальных систем отсчёта

Как установить, что данная система отсчёта является инерциальной? Это можно сделать только опытным путём. Именно опыт подтверждает, что с большой степенью точности систему отсчёта, связанную с Землёй (геоцентрическую систему отсчёта, рис. 2.6), можно считать инерциальной. Но строго инерциальной она, как об этом будет рассказано позднее, не является.

С гораздо большей точностью можно считать инерциальной систему отсчёта, в которой начало координат совмещено с центром Солнца, а координатные оси направлены к неподвижным звёздам (рис. 2.7). Эту систему отсчёта называют гелиоцентрической.

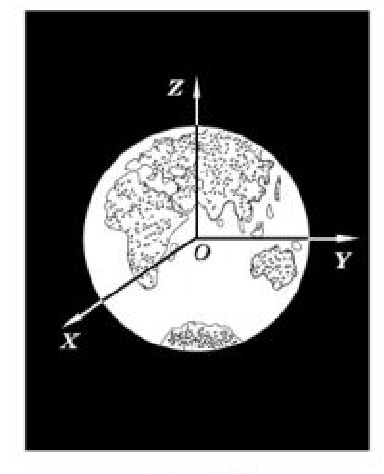


Рис. 2.6

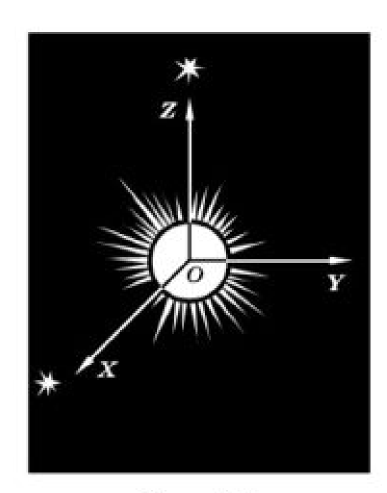


Рис. 2.7

Начиная с этого момента изучать механическое движение мы будем в инерциальных системах отсчёта. В этих системах законы механического движения в самом общем случае выглядят наиболее просто.

Самый важный вопрос, который мы выяснили, — это характер движения свободного тела. В результате обобщения опытных фактов установили, что движение свободного тела происходит с постоянной скоростью. Но такое движение наблюдается не в любых системах отсчёта, а в особых (привилегированных) системах, называемых инерциальными.

? **1.** Чем объясняется ускорение разных точек шара, вращающегося по инерции вокруг оси, проходящей через его центр?

2. Придумайте и проведите эксперимент, устанавливающий существование инерциальных систем отсчёта.

§ 2.4. СИЛА

В инерциальной системе отсчёта тело движется с постоянной скоростью, если на него не действуют другие тела. Если такие действия есть, то скорость тела меняется — тело приобретает ускорение. Это воздействие тел друг на друга характеризуется силой.

Смысл введения понятия «сила»

Количественную меру действия тел друг на друга, в результате которого тела получают ускорения, называют в механике силой.

Это пока ещё качественное, недостаточное для такой точной науки, как физика, определение. Введя его, мы разделили главное утверждение механики на два:

1) ускорение тел вызывается силами;

2) силы обусловлены действиями на данное тело каких-либо других тел.

Это разделение задачи о нахождении ускорения данного тела в зависимости от действия на данное тело других тел на две отдельные задачи существенно облегчает исследование. Связи между ускорениями и силами, с одной стороны, и между силами и конфигурацией тел, а также их относительными скоростями — с другой, более прозрачны, чем связи ускорений непосредственно с конфигурацией тел и их скоростями.

Понятие силы относится к двум телам

С самого начала нужно отчётливо представлять себе, что понятие силы относится к двум телам, а не к одному и не ко многим. Всегда можно указать тело, на которое действует сила, и тело, со стороны которого она действует. Так, сила тяжести действует на камень со стороны Земли, а на шарик, прикреплённый к растянутой пружине, действует сила упругости со стороны пружины.

Сила имеет направление

Сила упругости растянутой пружины действует вдоль её оси. Вы сами можете подействовать на лежащую на столе книгу мускульной силой в любом направлении. Это даёт основание предположить, что сила является векторной величиной (т. е. характеризуется модулем и направлением). В дальнейшем это утверждение будет обосновано.

Сравнение сил

Для количественного определения силы мы должны уметь её измерять. Только после этого можно говорить о силе как об определённой физической величине.

Но ведь действия на данное тело могут быть самыми разнообразными. Что общего, казалось бы, между силой притяжения Земли к Солнцу и силой, которая, преодолевая тяготение, заставляет двигаться ракету, или между этими двумя силами и обычной мускульной силой? Ведь они совершенно различны по своей природе. Можно ли говорить о них как о чём-то физически родственном? Можно ли сравнивать их?

Когда человек не может поднять тяжёлую вещь, он говорит: «Не хватает сил». При этом, в сущности, происходит сравнение двух совершенно разных по природе сил: мускульной силы и силы, с которой Земля притягивает этот предмет. Но если вы подняли тяжёлый предмет и держите его на весу, то ничто не мешает вам утверждать, что мускульная сила ваших рук по модулю равна силе тяжести. Это утверждение, по существу, и является определением равенства сил в механике.

Две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одно-

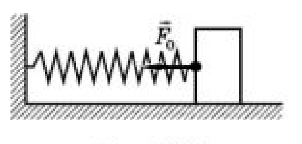


Рис. 2.8

временное действие на тело не меняет его скорость (т. е. не сообщает телу ускорения).

Это определение позволяет измерять силы, если одну из них принять за единицу.

Измерение сил

Для измерения сил надо располагать эталоном единицы силы.

В качестве эталона единицы силы выберем силу $\vec{F}_0$, с которой некоторая определённая (эталонная) пружина при фиксированном растяжении действует на прикреплённое к ней тело (рис. 2.8). Сила упругости пружины направлена вдоль оси пружины. (Необязательно брать именно пружину; можно использовать любое упругое тело, деформацию которого легко измерить.)

Теперь установим способ сравнения сил с эталонной силой.

Мы уже говорили, что две силы считаются равными по модулю и противоположными по направлению, если при одновременном действии они не сообщают телу ускорения. Следовательно, измеряемая сила $\vec{F}$ равна по модулю эталонной силе $\vec{F}_0$ и направлена в противоположную сторону, если под действием этих сил тело не получает ускорения (рис. 2.9). Причём сила $\vec{F}$ может быть любой природы: силой упругости другой пружины, силой трения, мускульной силой и т. д.

При действии по одному направлению двух сил $\vec{F}_0$ (рис. 2.10) будем считать, что измеряемая сила $\vec{F}$, направленная в противоположную сторону, по модулю равна $2\vec{F}_0$, если все три силы, действуя одновременно на тело, не сообщают ему ускорения.

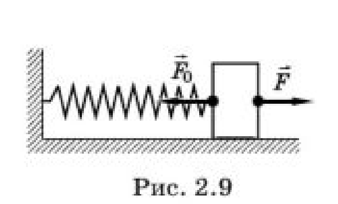


Рис. 2.9

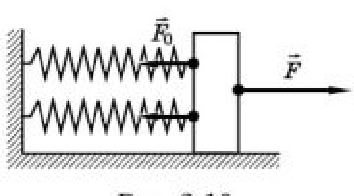


Рис. 2.10

Таким образом, располагая эталоном силы, можно измерять силы, кратные эталону. Процедура измерения состоит в следующем: к телу, на которое действует измеряемая сила, прикладывают в сторону, противоположную её направлению, такое количество эталонных сил, чтобы тело не получило ускорения, и подсчитывают число эталонных сил. Естественно, что при этом ошибка в измерении произвольной силы будет такой же, как сама эталонная сила $\vec{F}_0$. Выбрав эталонную силу достаточно малой, можно в принципе проводить измерения с требуемой точностью.

Динамометр

На практике для измерения сил применяют одну пружину, проградуированную на различные значения силы, — динамометр (рис. 2.11). Использование динамометра основано на том факте, что сила упругости пружины в определённых пределах прямо пропорциональна её деформации. Поэтому по длине растянутой пружины можно непосредственно судить о значении силы.

Геометрическое сложение сил

Располагая методом измерения сил, можно опытным путём доказать, что силы складываются, как векторы. Именно это даёт основание считать силу, подобно скорости и ускорению, векторной величиной.

Один из простых опытов, доказывающих, что силы надо складывать векторно, можно осуществить так.

Нужно взять три нити и связать их концы узлом. На свободных концах нитей сделать петли и надеть их на крючки трёх динамометров. После этого все три динамометра укрепить на доске гвоздями так, чтобы их пружины были растянуты (рис. 2.12, *а*). На узел *O* будут действовать со стороны динамометров три силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, значения которых определяются показаниями динамометров. На листе бумаги, закреплённом на доске, надо отметить положение узла *O*, направления всех трёх нитей и значения сил в произвольном масштабе.

После этого динамометр *2* отцепляется, а динамометр *1* снимается с гвоздя и закрепляется в новом положении так, чтобы узел *O* остался на прежнем месте, а направление нити, прикреплённой к динамометру *3*, и его показания не изменились (рис. 2.12, *б*). Показание динамометра *1* будет,

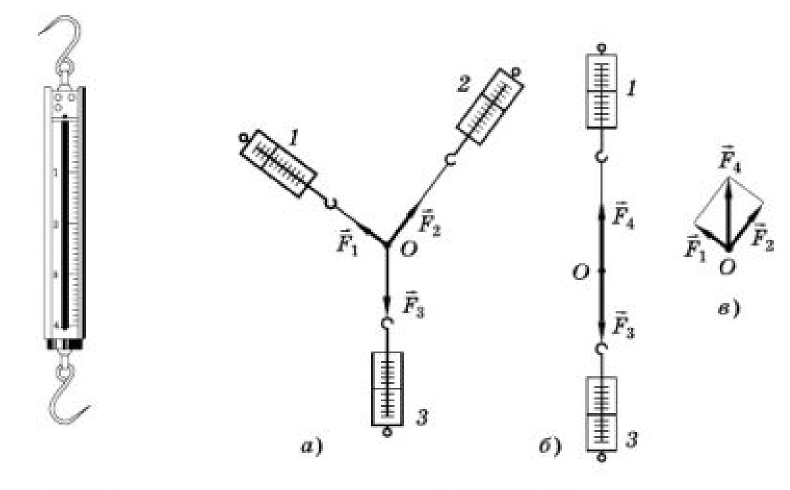


Рис. 2.11 Рис. 2.12

очевидно, совпадать с показанием динамометра *3*, так как узел *O* находится в равновесии.

Можно утверждать, что пружина динамометра *1* в новом положении оказывает на узел *O* точно такое же действие, как и два динамометра *1* и *2* при начальном расположении динамометров. Это означает, что сила $\vec{F}_4$ по своему действию эквивалентна силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и является их равнодействующей.

Отметим на бумаге направление силы $\vec{F}_4$ и её значение в том же масштабе, что и раньше. Сняв динамометры с доски, соединим концы отрезков, изображающих силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_4$. Получится параллелограмм, показанный на рисунке 2.12, *в*.

Можно повторить опыт, меняя расположения динамометров и растяжения их пружин. Во всех случаях полученная при аналогичных построениях фигура будет представлять собой параллелограмм. В частности, если $F_1 = 3$ ед., $F_2 = 4$ ед., то $F_3 = F_4 = 5$ ед. При этом нити *1* и *2* образуют прямой угол. Согласно теореме Пифагора,

$$F_3 = F_4 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5 \text{ ед.},$$

как это и получается экспериментально.

Итак, сила $\vec{F}_4$, эквивалентная силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, является диагональю параллелограмма, стороны которого изображают

силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Следовательно, силы складываются, как векторы. По этой причине, рассказывая о способах измерения сил, мы применяли для них векторные обозначения.

О силах в механике

Нам ещё предстоит в дальнейшем довольно обстоятельный разговор о силах. Пока же ограничимся несколькими замечаниями.

В механике не рассматривается природа тех или иных сил. Не делается попыток выяснить, вследствие каких физических процессов появляются те или иные силы. Это задача других разделов физики.

В механике важно лишь знать, при каких условиях возникают силы и каковы их модули и направления, т. е. знать, как силы зависят от расстояний между телами и от скоростей их движения. А узнать значения сил, определить, когда и как они действуют, можно, не вникая в природу сил, а лишь располагая способами их измерения.

В механике в первую очередь имеют дело с тремя видами сил: гравитационными силами, силами упругости и силами трения. Модули и направления этих сил определяются опытным путём. Важно, что все рассматриваемые в механике силы зависят либо только от расстояний между телами или частями одного тела (гравитация и упругость), либо только от относительных скоростей тел (трение).

Дано определение силы и указан метод её измерения. Доказано, что силы складываются, как векторы.

? 1. На каком принципе основана процедура измерения силы? Отличается ли она от процедуры измерения других физических величин?

2. Поясните ситуацию, описанную в басне И. А. Крылова «Лебедь, Щука и Рак». Аргументируйте с помощью геометрических построений векторов смысл фразы: «Да только воз и ныне там».

Когда в товарищах согласья нет,
На лад их дело не пойдёт,
И выйдет из него не дело, только мука.
Однажды Лебедь, Рак да Щука
Везти с поклажей воз взялись
И вместе трое все в него впряглись;
Из кожи лезут вон, а возу всё нет ходу!

Поклажа бы для них казалась и легка:
Да Лебедь рвётся в облака,
Рак пятится назад, а Щука тянет в воду.
Кто виноват из них, кто прав — судить не нам;
Да только воз и ныне там.

§ 2.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ УСКОРЕНИЕМ И СИЛОЙ

Ускорения тел определяются действующими на них силами. После того как мы научились измерять силу и знаем в принципе, как определять ускорение, можно ответить на главный вопрос: «Как зависит ускорение тела от действующих на него сил?»

Экспериментальное определение зависимости ускорения от силы

Установить на опыте связь между ускорением и силой с абсолютной точностью нельзя, так как любое измерение даёт приблизительное значение измеряемой величины. Но подметить характер зависимости ускорения от силы можно с помощью несложных опытов. Уже простые наблюдения показывают, что чем больше сила, тем быстрее меняется скорость тела, т. е. тем больше его ускорение. Естественно предположить, что ускорение прямо пропорционально силе. В принципе, конечно, зависимость ускорения от силы может быть более сложной, но сначала надо посмотреть, не справедливо ли самое простое предположение.

Лучше всего изучать поступательное движение тела, например металлического бруска по горизонтальной поверхности стола, так как только при поступательном движении ускорение всех точек одно и то же, и мы можем говорить об определённом ускорении тела в целом. Однако в этом случае сила трения о стол велика и, главное, её трудно точно измерить[1].

Поэтому возьмём тележку с лёгкими колёсами и установим её на рельсы. Тогда сила трения сравнительно невелика, а массой колёс можно пренебречь по сравнению с массой тележки, движущейся поступательно (рис. 2.13).

---

[1] Лучше использовать движение бруска на воздушной подушке (см. § 2.3).

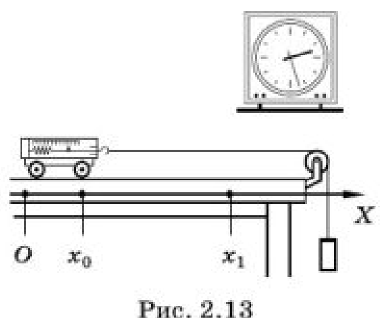


Рис. 2.13

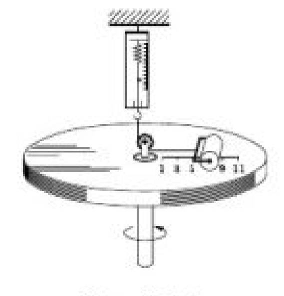


Рис. 2.14

Пусть на тележку действует постоянная сила со стороны нити, к концу которой прикреплён груз. Модуль силы измеряется пружинным динамометром. Эта сила постоянна, но не равна при движении силе, с которой Земля притягивает подвешенный груз. Измерить ускорение тележки непосредственно, определяя изменение её скорости за малый интервал времени, весьма затруднительно. Но его можно оценить, измеряя время t, затрачиваемое тележкой на прохождение пути s.

Учитывая, что при действии постоянной силы ускорение тоже постоянно, так как оно однозначно определяется силой, можно использовать кинематические формулы равноускоренного движения. При начальной скорости, равной нулю,

$$s = x_1 - x_0 = \frac{at^2}{2},$$

где x_0 и x_1 — начальная и конечная координаты тела. Отсюда

$$a = \frac{2s}{t^2}. \qquad (2.5.1)$$

Непосредственно на глаз заметно, что тележка тем быстрее набирает скорость, чем больше действующая на неё сила. Тщательные измерения модулей силы и ускорения показывают прямую пропорциональность между ними:

$$a \sim F.$$

Существуют и другие опыты, подтверждающие эту связь. Вот один из них. Массивный каток (рис. 2.14) установлен на платформе. Если привести платформу во вращение, то каток под действием натянутой нити приобретает центростреми-

тельное ускорение, которое легко определить по радиусу вращения R и числу оборотов в секунду n:

$$a = 4\pi^2 n^2 R.$$

Силу найдём из показаний динамометра. Изменяя число оборотов и сопоставляя F и a, убедимся, что $F \sim a$.

Если на тело одновременно действует несколько сил, то модуль ускорения тела будет пропорционален модулю геометрической суммы всех этих сил, равной

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots . \qquad (2.5.2)$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{F}$ направлены по одной прямой в одну и ту же сторону:

$$\vec{a} \sim \vec{F}. \qquad (2.5.3)$$

Это видно на опыте с тележкой: ускорение тележки направлено вдоль привязанной к ней нити.

Что такое инерция?

Согласно механике Ньютона сила однозначно определяет ускорение тела, но не его скорость. Это нужно очень отчётливо представлять себе. Сила определяет не скорость, а то, как быстро она изменяется. Поэтому покоящееся тело приобретёт заметную скорость под действием силы лишь за некоторый интервал времени.

Ускорение возникает сразу, одновременно с началом действия силы, но скорость нарастает постепенно. Даже очень большая сила не в состоянии сообщить телу сразу значительную скорость. Для этого нужно время. Чтобы остановить тело, опять-таки нужно, чтобы тормозящая сила, как бы она ни была велика, действовала некоторое время.

Именно эти факты имеют в виду, когда говорят, что тела инертны. Приведём примеры простых опытов, в которых очень наглядно проявляется инертность тел.



Рис. 2.15

1. Массивный шар подвешен на тонкой нити, внизу к нему привязана точно такая же нить (рис. 2.15). Если медленно тянуть за нижнюю нить, то, как и следовало ожидать, рвётся верхняя нить. Ведь на неё действует и вес шара, и сила, с которой мы тянем шар вниз. Однако если за нижнюю нить очень быстро дёрнуть, то оборвётся именно она, что на первый взгляд довольно странно. Но это легко объяс-

нить. Когда мы тянем за нить медленно, то шар постепенно опускается, растягивая верхнюю нить до тех пор, пока она не оборвётся.

При быстром рывке с большой силой шар получает большое ускорение, но скорость его не успевает увеличиться сколько-нибудь значительно за тот малый промежуток времени, в течение которого нижняя нить сильно растягивается, поэтому именно она и обрывается, а верхняя нить растягивается мало и остаётся целой.

2. Интересен опыт с длинной палкой, подвешенной на бумажных кольцах (рис. 2.16). Если резко ударить по палке железным стержнем, то палка ломается, а бумажные кольца остаются невредимыми. Этот опыт вы постарайтесь объяснить сами.

3. Ещё более простой опыт можно выполнить дома. Идея опыта ясна из рисунка 2.17. Левая часть рисунка соответствует ситуации, когда $\vec{v} = \text{const}$ или $a = 0$. На правой части рисунка $\vec{v} \neq \text{const}$, т. е. $a \neq 0$.

4. Наконец, самый, пожалуй, эффектный опыт. Если выстрелить в пустой пластмассовый сосуд, пуля оставит в стенках отверстия, но сосуд останется целым. Если же выстрелить в такой же сосуд, заполненный водой, то сосуд разорвётся на мелкие части. Этот результат опыта объясняется так. Вода очень мало сжимаема, и небольшое изменение её объёма приводит к резкому возрастанию давления. Когда пуля очень быстро входит в воду, пробив стенки сосуда, давление резко возрастает. Из-за инертности воды её уровень не успевает повыситься, и возросшее давление разрывает сосуд на части.

Иногда говорят, что благодаря инерции тело «сопротивляется» попыткам изменить его скорость. Это не совсем верно. Тело всегда меняет скорость под действием силы, но изменение скорости требует времени. Как подчёркивал Дж. Максвелл, говорить о сопротивлении тела попыткам изменить

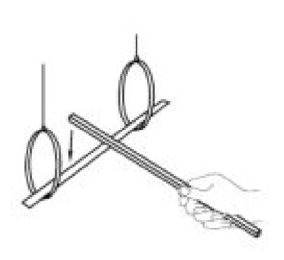
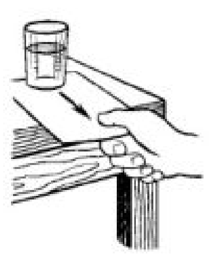


Рис. 2.16



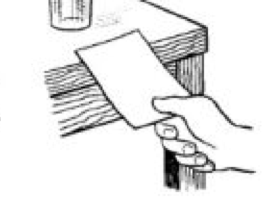


Рис. 2.17

его скорость так же неправильно, как и говорить о том, что чай «сопротивляется» тому, чтобы стать сладким. Просто нужно некоторое время для растворения сахара.

Законы механики и повседневный опыт

Основное утверждение механики достаточно наглядно и не сложно. Оно без особого труда укладывается в нашем сознании. Ведь мы с рождения живём в мире тел, движение которых подчиняется законам механики Ньютона.

Но иногда приобретённые из жизненного опыта представления могут подвести. Так, слишком укоренилось представление о том, что скорость тела направлена в ту же сторону, куда направлена приложенная к нему сила. На самом же деле сила определяет не скорость, а ускорение тела, и направления скорости и силы могут не совпадать. Это хорошо видно на рисунке 2.18.

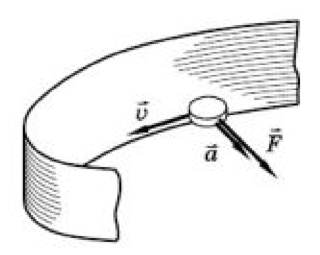


Рис. 2.18

При движении тела, брошенного под углом к горизонту, сила тяжести всё время направлена вниз, и скорость, касательная к траектории, образует с силой некоторый угол, который в процессе полёта тела изменяется.

Направление силы совпадает с направлением скорости только в частном случае прямолинейного движения с растущей по модулю скоростью.

Установлен главный для динамики факт: ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе.

? 1. Нить, на которой подвешен шарик, отклонили на некоторый угол и отпустили. Куда направлена равнодействующая сил, действующих на шарик, в момент, когда нить вертикальна?

2. Начертите на полу небольшой круг и устройте соревнование. Каждый участник быстро идёт по прямой в направлении к кругу, держа в руке теннисный мячик. Задача состоит в том, чтобы выпущенный из рук мячик попал в круг. Это соревнование покажет, кто из вас лучше понимает сущность механики Ньютона.

3. Приведите из собственного опыта примеры, доказывающие, что ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе.

Величину $\frac{F}{a}$, равную отношению модуля силы к модулю ускорения, называют массой (точнее, инертной массой) тела.

Масса — основная динамическая характеристика тела, количественная мера его инертности, т. е. способности тела приобретать определённое ускорение под действием силы. Для данного тела ускорение пропорционально силе, и коэффициентом пропорциональности является масса.

Многим из вас это определение массы может показаться очень неглубоким, «скучным». Ведь оно не объясняет главного: почему у тел вообще есть масса, каково её физическое происхождение. К сожалению, всё это справедливо. Природу массы пока не понимает никто. Никто не может объяснить, почему элементарные частицы имеют те или иные массы. Но приведённое определение массы позволяет её измерить, а по известной массе точнейшим образом рассчитывать движения тел. А это и есть основная задача механики.

Второй закон Ньютона

Введя понятие массы, сформулируем окончательно второй закон Ньютона:

произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}.} \tag{2.6.1}$$

Эта короткая формула выражает один из самых фундаментальных законов природы, которому с удивительной точностью подчиняются движения как громадных небесных тел, так и мельчайших песчинок, гонимых ветром. С помощью этого закона можно рассчитывать движение поршня в цилиндре автомобиля и сложнейшие траектории космических кораблей.

Уверенность в справедливости второго закона Ньютона основывается не на результатах отдельных опытов, которые позволяют подойти к формулировке этого закона, а на том, что все вытекающие из него следствия, проверяемые как специальными опытами, так и всей человеческой практикой, оказываются правильными.

Заметим, что если на тело не действуют силы или их сумма равна нулю ($\vec{F} = 0$), то относительно инерциальной систе-

мы отсчёта $\vec{a} = 0$ и, следовательно, $\vec{v}$ = const. Однако это не означает, что первый закон Ньютона есть следствие второго. В первом законе содержится утверждение о существовании инерциальных систем отсчёта. Второй закон Ньютона справедлив именно для этих систем.

Измерение массы

В приведённой формулировке второго закона содержится проверяемое на опыте утверждение о том, что ускорение прямо пропорционально силе, и одновременно определение массы.

Используя второй закон Ньютона, можно вычислить массу тела, измерив независимо силу и ускорение:

$$m = \frac{F}{a}. \qquad (2.6.2)$$

Правда, на практике гораздо точнее и удобнее измерять массу с помощью весов. Об этом будет рассказано в дальнейшем.

Если измерить массы m_1, m_2, m_3 нескольких, например трёх, тел, а затем соединить эти тела вместе и измерить массу m одного объединённого тела, то будет выполняться простое соотношение

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Справедливо и обратное: если разделить тело на части, то сумма масс этих частей будет равна массе тела до разделения.

Впрочем (об этом пойдёт речь в других разделах курса), данные утверждения не являются абсолютно точными. Не является также точным утверждение механики Ньютона о постоянстве массы тела, независимости её от скорости движения. Это справедливо лишь для скоростей движения тел, много меньших скорости света.

Сформулирован основной закон динамики — второй закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}$. Его нужно запомнить в первую очередь и понимать смысл всех трёх величин, входящих в этот закон.

? 1. К центру шара приложена сила $\vec{F}$ (рис. 2.19). Куда движется шар? (Это самая простая задача на второй закон Ньютона.)

2. Почему второй закон Ньютона называют основным законом динамики?

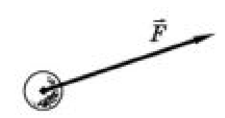


Рис. 2.19

§ 2.7. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Третий закон Ньютона выражает одно общее свойство всех сил, рассматриваемых в механике. Состоит это свойство в том, что любые действия тел друг на друга носят характер взаимодействия. Это означает, что если тело A действует на тело B, сообщая ему ускорение, то и тело B действует на тело A, также сообщая ему ускорение.

Взаимодействие тел

Примеров взаимодействия тел можно привести сколь угодно много. Когда вы, находясь в одной лодке, начнёте за верёвку подтягивать другую, то и ваша лодка обязательно продвинется вперёд (рис. 2.20). Действуя на вторую лодку, вы заставляете её действовать на вашу лодку.

Если вы ударите ногой по футбольному мячу, то немедленно ощутите обратное действие на ногу. Нельзя толкнуть плечом кого-либо, не испытав обратного действия на ваше плечо. Всё это проявления общего закона взаимодействия тел.

Действия тел друг на друга носят характер взаимодействия не только при непосредственном контакте тел. Положите, например, на гладкий стол два сильных магнита разноимёнными полюсами навстречу друг другу, и вы тут же обнаружите, что магниты начнут двигаться навстречу друг другу.

Заметные изменения скоростей обоих взаимодействующих тел наблюдаются, однако, лишь в тех случаях, когда массы этих тел не сильно отличаются друг от друга. Если же взаимодействующие тела значительно различаются по мас-

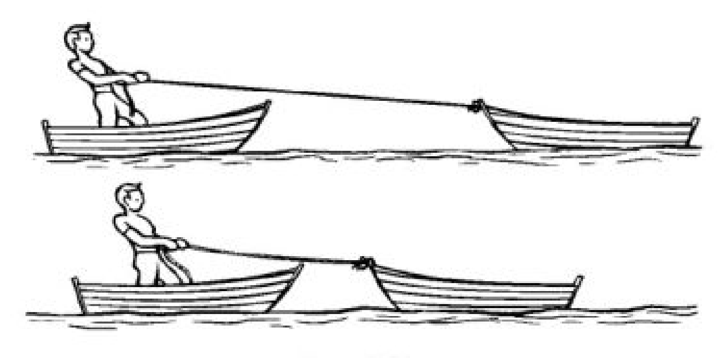


Рис. 2.20

се, заметное ускорение получает только то из них, которое имеет меньшую массу. Так, при падении камня Земля заметно ускоряет движение камня, но ускорение Земли (а ведь камень тоже притягивает Землю) практически обнаружить нельзя, так как оно очень мало.

Силы взаимодействия двух тел

Выясним с помощью опыта, как связаны между собой силы взаимодействия двух тел.

Возьмём достаточно сильный магнит и железный брусок и положим их на катки, чтобы уменьшить трение о стол (рис. 2.21). К магниту и бруску прикрепим одинаковые мягкие пружины, зацепленные другими концами на столе. Магнит и брусок притянутся друг к другу и растянут пружины. Опыт показывает, что к моменту прекращения движения пружины оказываются растянутыми совершенно одинаково. Это означает, что на оба тела со стороны пружин действуют одинаковые по модулю и противоположные по направлению силы:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \tag{2.7.1}$$

Так как магнит покоится, то сила $\vec{F}_2$ равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}_4$, с которой на него действует брусок:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4. \tag{2.7.2}$$

Точно так же равны по модулю и противоположны по направлению силы, действующие на брусок со стороны магнита и пружины:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1. \tag{2.7.3}$$

Из равенств (2.7.1), (2.7.2), (2.7.3) следует, что силы, с которыми взаимодействуют магнит и брусок, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4. \tag{2.7.4}$$

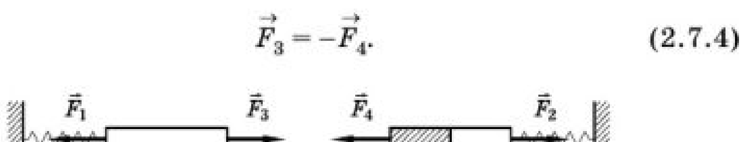


Рис. 2.21

Третий закон Ньютона

На основе этого и подобных опытов можно сформулировать третий закон Ньютона.

Силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Это означает, что если на тело A со стороны тела B действует сила $\vec{F}_A$ (рис. 2.22), то одновременно на тело B со стороны тела A действует сила $\vec{F}_B$, причём

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B. \qquad (2.7.5)$$

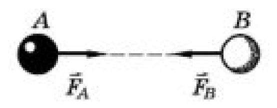


Рис. 2.22

Используя второй закон Ньютона, можно равенство (2.7.5) записать так:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \qquad (2.7.6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} = \text{const}. \qquad (2.7.7)$$

Отношение модулей a_1 и a_2 ускорений взаимодействующих тел определяется обратным отношением их масс и совершенно не зависит от природы действующих между ними сил[1].

Как уже говорилось в начале этого параграфа, более массивное тело получает небольшое ускорение, а менее массивное — значительно большее.

В этом можно убедиться на следующем простом опыте. Поставим на гладкие рельсы две тележки одинаковой массы и на одной из них закрепим небольшой электрический двигатель, на вал которого может наматываться нить, привязанная к другой тележке, а на другую поставим гирю, масса

---

[1] Здесь имеется в виду, что никакие другие силы, кроме сил взаимодействия, на эти тела не действуют.



Рис. 2.23

которой равна массе двигателя (рис. 2.23). При работающем двигателе обе тележки устремляются с одинаковыми ускорениями навстречу друг другу и проходят одинаковые пути. Если массу одной из тележек сделать вдвое большей, то её ускорение окажется в два раза меньше, чем другой, и за то же время она пройдёт вдвое меньший путь.

Связь ускорений взаимодействующих тел с их массами можно установить и на таком опыте (рис. 2.24). На горизонтальную платформу помещают два катка разной массы, соединённые нитью. Опыт покажет, что можно найти такое положение катков, когда они при вращении платформы не перемещаются по ней. Измерив радиусы обращения катков вокруг центра платформы, определим отношение центростремительных ускорений катков:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 R_1}{\omega^2 R_2} \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Сравнив это отношение с обратным отношением масс тел $\frac{m_2}{m_1}$, убеждаемся, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ при любых скоростях вращения платформы.

Важное замечание

Надо помнить, что силы, о которых идёт речь в третьем законе Ньютона, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга.

Непонимание этого часто приводит к недоразумениям. Так, иногда с помощью третьего закона Ньютона пытаются объяснить, почему то или иное тело находится в покое. Например, утверждают, что мел на столе покоится якобы потому, что сила тяжести $\vec{F}_т$, действующая на тело, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости $\vec{N}$ (силе реакции опоры), действующей на него со стороны стола. На самом деле

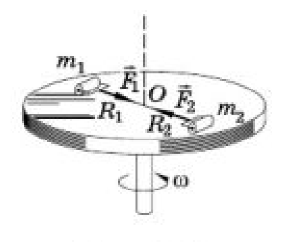


Рис. 2.24

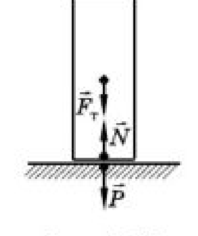


Рис. 2.25

равенство $\vec{F}_т + \vec{N} = 0$ является следствием второго закона Ньютона, а не третьего: ускорение равно нулю, поэтому и сумма сил, действующих на тело, равна нулю. Из третьего же закона Ньютона вытекает лишь, что сила реакции опоры $\vec{N}$ равна по модулю силе $\vec{P}$, с которой мел давит на стол (рис. 2.25). Эти силы приложены к разным телам и направлены в противоположные стороны.

На следующий вопрос ответьте самостоятельно: лошадь тянет сани, а сани действуют на лошадь с такой же по модулю силой, направленной в противоположную сторону. Почему же лошадь везёт сани, а не наоборот?

О значении третьего закона Ньютона

Главное значение третьего закона Ньютона обнаруживается при исследовании движения системы материальных точек или системы тел. Этот закон позволяет, как мы увидим в дальнейшем, доказать важные теоремы динамики и сильно упрощает изучение движения тел в тех случаях, когда их нельзя рассматривать как материальные точки.

Ньютон сформулировал третий закон динамики так: действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — действия двух тел друг на друга равны и направлены в противоположные стороны.

? **1.** Выпишите наиболее часто встречающиеся формулировки третьего закона Ньютона. Чем обусловлено существование разных формулировок?

2. Почему важно при изучении различных взаимодействий тел учитывать точки приложения сил?

§ 2.8. ЕДИНИЦЫ МАССЫ И СИЛЫ. ПОНЯТИЕ О СИСТЕМЕ ЕДИНИЦ

Единица массы килограмм известна всем. С единицей силы ньютоном вы познакомитесь сейчас.

Основные и производные единицы физических величин

В кинематике мы пользовались двумя основными физическими величинами — длиной и временем. Для единиц этих величин установлены соответствующие эталоны, сравнением с которыми определяется любая длина и любой интервал времени. Единицей длины является метр, а единицей времени — секунда. Все другие кинематические величины не имеют эталонов единиц. Единицы таких величин называются производными. Связь производных единиц с единицами основных величин в кинематике вытекает из самих определений производных величин.

При переходе к динамике мы должны ввести ещё одну основную единицу и установить её эталон. Дело в том, что второй закон Ньютона содержит две новые, динамические величины — силу и массу. Ни одну из этих величин нельзя выразить только через кинематические величины.

С равным правом можно считать основной величиной как силу, так и массу. Выбрав для единицы одной из этих величин эталон, получают единицу для другой, используя второй закон Ньютона. Соответственно получаются две различные системы единиц.

Вводя понятие силы, мы говорили о том, что в качестве эталона единицы силы можно взять пружину, растянутую определённым образом. Однако практически такой эталон силы неудобен, так как, во-первых, трудно изготовить две пружины с совершенно одинаковыми свойствами, а во-вторых, упругие свойства пружин могут несколько изменяться с течением времени и в зависимости от окружающих условий, например от температуры. Лучше в качестве единицы силы взять силу, с которой Земля притягивает определённую эталонную гирю.

Международная система единиц

В настоящее время наиболее широко в физике и технике применяется система единиц, в которой в качестве основной

величины взята не сила, а масса. Единица же силы устанавливается на основе второго закона Ньютона.

В Международной системе единиц (СИ)[1] за единицу массы один килограмм (1 кг) принята масса эталонной гири, выполненной в форме прямого цилиндра высотой 39 мм, равной диаметру, из сплава платины и иридия. Эталон килограмма хранится в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа. Точные копии этой гири имеются во всех странах. Приближённо массу 1 кг имеет 1 л воды при комнатной температуре. Легко осуществимые способы сравнения массы любого тела с массой эталона путём взвешивания мы рассмотрим позднее.

За единицу силы в Международной системе единиц принимается сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с².

Эта единица силы называется ньютоном (сокращённо — Н). Единица силы ньютон выражается через основные единицы СИ так:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м/с}^2 = 1\ \text{кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

Другие системы единиц

Длительное время в физике использовалась и достаточно широко используется в настоящее время (особенно в теоретической физике) система единиц СГС.

За единицу длины в этой системе принят сантиметр ($1\ \text{см} = 10^{-2}$ м), за единицу массы — грамм ($1\ \text{г} = 10^{-3}$ кг), а единицей времени служит секунда (1 с).

За единицу силы в системе СГС принимается сила, которая телу массой 1 г *сообщает ускорение* 1 см/с². Эта единица называется диной (1 дин).

Так как 1 г = 0,001 кг, а 1 см = 0,01 м, то 1 Н = 100 000 дин = $= 10^5$ дин. В технике используется ещё одна единица силы, называемая килограмм-силой (1 кгс). За 1 кгс принята сила, с которой Земля притягивает к себе эталонную гирю массой 1 кг. Применяется также дольная единица — грамм-сила (1 гс):

$$1\ \text{кгс} = 1000\ \text{гс}.$$

---

[1] Международная система единиц (международное сокращённое наименование — SI, в русской транскрипции — СИ) принята в 1960 г. XI Генеральной конференцией по мерам и весам (ГКМВ) и уточнена на последующих ГКМВ.

О массе в 1 кг и силе в 1 кгс каждый имеет определённое представление. Сила 1 Н примерно в 10 раз меньше 1 кгс. Точное соотношение между 1 Н и 1 кгс мы получим позднее.

Дина — очень малая единица силы. Она почти в миллион раз меньше силы в 1 кгс.

Несколько примеров значений сил: 100-граммовая гирька, поставленная на руку, действует на неё с силой 1 Н.

Сила мышц руки при сдавливании пружинного динамометра 350—400 Н.

Упираясь ногами в пол, вы можете растянуть пружину с силой около 1000 Н.

Электрон притягивается к протону в атоме водорода с силой порядка 10^{-8} Н, а на протон в ускорителе элементарных частиц действует сила 10^{-12} Н.

Сила тяги колёсного трактора около $6 \cdot 10^4$ Н, а двигателя первой ступени космического корабля $4 \cdot 10^8$ Н.

Земля притягивает Луну с силой $2 \cdot 10^{22}$ Н.

После того как введены единицы массы и силы, мы можем выражать эти величины определёнными числами.

? Упираясь ногами в пол, человек может растянуть пружину с силой около 1000 Н. А как «почувствовать» силу 1 Н?

§ 2.9. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

С помощью законов Ньютона мы можем не только объяснять наблюдаемые механические явления, но и предсказывать их течение.

Основная (прямая) задача механики

Основная задача механики состоит в нахождении положения и скорости тела в любой момент времени, если известны его положение и скорость в начальный момент времени и действующие на него силы.

Эта задача решается с помощью второго закона Ньютона — основного закона классической механики:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ \dots . \qquad (2.9.1)$$

Его часто называют **уравнением движения.**

Так как ускорение и сила — величины векторные, то уравнение (2.9.1) фактически является компактной записью трёх независимых уравнений:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots, \\ ma_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots, \\ ma_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots, \end{aligned} \qquad (2.9.2)$$

где a_x, a_y, a_z — проекции вектора ускорения на оси координатной системы отсчёта, а F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — проекции векторов сил на те же оси. В случае движения на плоскости достаточно двух уравнений в проекциях, а в случае прямолинейного — одного.

Обычно нам бывают известны из опыта силы как функции координат и скоростей. Зная силы и массу, легко определить проекции ускорения с помощью уравнений (2.9.2).

Но ускорение, как вы знаете из кинематики, не определяет однозначно скорость тела и его координаты. Так, в случае постоянной проекции ускорения a_x на ось X проекция скорости υ_x и координата x находятся из уравнений

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t, \qquad (2.9.3)$$

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (2.9.4)$$

Таким образом, для определения проекции скорости в произвольный момент времени нужно знать проекцию начальной скорости υ_{0x} (проекцию в начальный момент времени $t_0 = 0$), а для определения координаты требуется ещё знание начальной координаты x_0.

Если же сила меняется с течением времени, то ускорение не остаётся постоянным. В этом случае формулы (2.9.3) и (2.9.4) уже не будут справедливыми для любого момента времени и зависимость координат и проекций скоростей от времени будет иметь гораздо более сложный вид. (Формулы (2.9.3) и (2.9.4) справедливы лишь для очень малых интервалов времени, в течение которых ускорение можно считать постоянным.) Но по-прежнему для нахождения координат и проекций скоростей нужно знать начальные значения этих величин.

Расчёт траектории космического корабля и его скорости в произвольный момент времени с учётом влияния как Земли, так и других планет — пример сложной задачи, решаемой с помощью электронных вычислительных машин. Необходимость использования ЭВМ связана ещё и с тем, что космические корабли имеют большие скорости. Поэтому при

коррекции траектории корабля необходимо обработать обширную информацию в очень короткое время.

Обратная задача механики

Кроме прямой задачи, законы механики позволяют решать и обратную задачу. Она состоит в определении сил по известному или заданному движению, т. е. по зависимости координат, скоростей или ускорений от времени. Такую обратную задачу решил Ньютон, определяя силу тяготения по известным кинематическим законам движения планет (законам Кеплера). В настоящее время подобные задачи решаются при определении формы Земли и расположения в ней горных пород различной плотности посредством точного определения орбит спутников.

Часто приходится решать обратную задачу конструкторам: по заданному условиями работы движению деталей машины им приходится рассчитывать действующие на них силы. Это необходимо для правильного выбора материалов, формы и размеров деталей, обеспечивающих необходимую прочность.

Во многих случаях силы упругости в растянутых тросах можно определить по ускорению, сообщаемому ими телам, не прибегая к непосредственному измерению деформации тросов.

Зная массу тела и силу, можно определить ускорение в любой момент времени. По известному ускорению и начальной скорости можно найти скорость в любой момент времени. Зная скорость и начальные координаты, можно вычислить координаты в любой момент времени.

? 1. Можно ли определить проекцию F_x на ось X равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой m, если известен закон движения $x(t)$ точки?

2. Можно ли установить закон движения $x(t)$ материальной точки, зная её массу m, а также проекцию F_x на ось X равнодействующей сил, действующих на точку?

§ 2.10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Познакомимся с методом решения задач механики с помощью электронно-вычислительной машины.

Задачи динамики решаются просто, если все силы, действующие на тело при его движении, остаются постоянными.

Однако вычисления значительно усложняются, если силы, действующие на тело, изменяются в процессе его движения. Ведь в таких случаях, чтобы найти новое положение тела, нужно знать скорость тела в течение всего времени его движения. Скорость, в свою очередь, зависит от ускорения. Но чтобы найти ускорение, нужно знать положение тела и его скорость. Выход из этого круга был найден самим Ньютоном. Он предложил приближённый численный метод, пригодный для решения любой задачи механики. С некоторыми уточнениями этот метод широко используется в современной науке и технике. В частности, с помощью него рассчитывается движение планет и их естественных и искусственных спутников, космических кораблей и т. д.

Чтобы понять, как делаются подобные расчёты, рассмотрим прямолинейное движение тела, на которое действует сила, зависящая от координаты этого тела. Такая сила действует, например, со стороны пружины на тело, закреплённое на её конце (рис. 2.26).

Если начало отсчёта совместить с концом недеформированной пружины, к которому прикреплено тело, то сила упругости, действующая на тело (точнее, её проекция на ось X), линейно зависит от его координаты x, т. е.

$$F_x = -kx. \qquad (2.10.1)$$

О линейной зависимости силы упругости от деформации говорилось в § 2.4, и подробнее она будет рассмотрена в следующей главе. Для нас сейчас важно лишь то, что сила однозначно зависит от координаты тела.

На тело массой m действует сила упругости, проекция F_x которой определяется выражением (2.10.1). Из второго закона Ньютона

$$ma_x = F_x \qquad (2.10.2)$$

следует, что ускорение тела равно

$$a_x = -\frac{k}{m}x. \qquad (2.10.3)$$

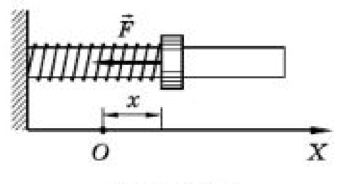


Рис. 2.26

Пусть в момент времени t_0, принимаемый за начальный, тело имело координату x_0 и скорость υ_{0x}. За малый промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ (например, 0,1 с, 0,01 с и т. д.) скорость тела изменяется очень мало. Её приближённо можно считать постоянной и для вычисления координаты x_1 тела к концу промежутка времени Δt, т. е. к моменту времени t_1, можно воспользоваться уравнением координаты равномерного движения:

$$x_1 = x_0 + \upsilon_{0x}\Delta t^{1}. \qquad (2.10.4)$$

Согласно формуле (2.10.3), ускорение тела зависит от его координаты. Но при малом значении Δt координата тела будет мало отличаться от значения начальной координаты x_0. Поэтому в течение всего промежутка времени Δt ускорение можно приближённо считать постоянным и принять его равным начальному значению, т. е.

$$a_{0x} = -\frac{k}{m}\, x_0.$$

Тогда скорость υ_{1x} тела к концу промежутка времени Δt можно вычислить по формуле

$$\upsilon_{1x} = \upsilon_{0x} + a_{0x}\Delta t. \qquad (2.10.5)$$

Итак, к концу промежутка времени Δt, т. е. в момент времени t_1, мы имеем новые значения x_1 и υ_{1x} координаты тела и его скорости. Эти данные можно принять за начальные для следующего такого же промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ и точно таким же образом вычислить значения x_2 и υ_{2x}, которые соответствуют концу второго промежутка времени, т. е. моменту времени t_2. При этом для вычисления x_2 вместо x_0 и υ_{0x} следует взять x_1 и υ_{1x}, а для вычисления υ_{2x} вместо υ_{0x} и a_{0x} соответственно υ_{1x} и a_{1x}. В свою очередь, a_{1x} получается подстановкой в формулу (2.10.3) не x_0, а x_1, т. е.

$$a_{1x} = -\frac{k}{m} x_1.$$

---

[1] Вообще говоря, для вычисления x_1 следовало бы применить формулу $x_1 = x_0 + \upsilon_{0x}\Delta t + \frac{a_x(\Delta t)^2}{2}$. Но при очень малых Δt, например при $\Delta t = 0{,}01$ с, $\Delta t^2 = 0{,}0001$ с^2, т. е. квадрат малого числа намного меньше самого числа. Поэтому последним слагаемым в формуле можно с большой степенью точности пренебречь.

Подобные расчёты можно продолжить для последующих промежутков времени Δt, пока не будет перекрыто всё то время, в течение которого мы интересуемся движением. Конечно, такой расчёт является приближённым. Мы ведь для каждого промежутка времени заменяем движение с переменным ускорением на движение с постоянным ускорением. Можно, однако, полагать, что при уменьшении Δt точность результатов возрастает. Доказательство этого составляет предмет высшей математики, основы которой заложил Ньютон. Следует иметь в виду, что на практике уменьшение промежутков времени Δt приводит к увеличению числа этих промежутков или, как говорят, к увеличению числа шагов, необходимого для перекрытия всего времени, в течение которого мы рассматриваем движение. В результате трудоёмкость вычислений может оказаться очень значительной. Поэтому большое значение имеют приёмы, позволяющие достигнуть достаточной точности за меньшее число шагов. Приведём простейший из этих приёмов.

Скорость и ускорение тела изменяются непрерывно в течение каждого из промежутков времени Δt — в конце промежутка они не те, что были вначале. Поэтому в формулах (2.10.4) и (2.10.5) следовало бы использовать значения скорости и ускорения не в начале промежутка $\Delta t = t_1 - t_0$, а в его середине. Это можно сделать, вычислив предварительно значения координаты и скорости по этим же формулам, но вместо Δt взяв $\frac{\Delta t}{2}$. Значение ускорения в середине промежутка времени Δt можно найти, используя полученное значение координаты. В результате расчёт одного шага производится по схеме, приведённой в таблице 3. Здесь значения, соответствующие середине промежутка времени Δt, обозначены индексом 1/2.

Таблица 3

Момент времени	**Координата**	**Скорость**	**Ускорение**
t_0	x_0	v_{0x}	$a_{0x} = -\frac{k}{m}x_0$
$t_{1/2} = t_0 + \frac{\Delta t}{2}$	$x_{1/2} = x_0 + v_{0x}\frac{\Delta t}{2}$	$v_{1/2x} = v_{0x} + a_{0x}\frac{\Delta t}{2}$	$a_{1/2x} = -\frac{k}{m}x_{1/2}$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_{1/2x}\Delta t$	$v_{1x} = v_{0x} + a_{1/2x}\Delta t$	$a_{1x} = -\frac{k}{m}x_1$

§ 2.11. СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ В МЕХАНИКЕ

В этом параграфе мы введём важнейшее для всей физики понятие «состояние». Речь пойдёт о состоянии системы в механике.

Пусть нам известны массы группы тел, движение которых мы рассматриваем (система тел), и характер зависимости сил взаимодействия между телами от их координат и скоростей. Тогда, если нам даны координаты и скорости всех тел системы в некоторый момент времени, второй закон Ньютона позволяет определить радиус-вектор $\vec{r}(t)$ и скорость $\vec{v}(t)$ каждого тела в любой последующий момент времени. Для этого нужно решить систему уравнений движения, используя начальные данные. Поэтому можно утверждать, что **координаты и скорости тел системы в данный момент времени полностью определяют её механическое состояние.**

Любая механическая величина, которая может представлять для нас интерес (импульс системы, её энергия и т. д.), выражается, как мы увидим в дальнейшем, через координаты и скорости тел известной массы.

Значение и смысл понятия состояния в физике

Понятие состояния системы, возникшее первоначально в рамках механики Ньютона, имеет важнейшее значение для всей физики.

Все фундаментальные физические теории характеризуются общей структурой. Три элемента составляют основу любой фундаментальной теории: совокупность физических величин, с помощью которых описываются объекты данной физической теории (координаты, скорости, ускорения, силы и т. д. в механике Ньютона), характеристика состояния системы (в механике состояние определяется совокупностью координат и скоростей всех тел) и уравнения движения, описывающие эволюцию состояния (второй закон Ньютона в механике).

Существенно, что состояние системы в данный начальный момент времени (т. е. начальные условия) не определяется чётко формулируемыми законами природы. Выдающийся учёный Е. Вигнер сказал по этому поводу следующее: «Законы физики определяют поведение объектов лишь при некоторых вполне определённых условиях, но в других отношениях оставляют большой произвол. Те элементы, поведение

которых не определяется законами природы, называются начальными условиями. Последние вместе с законами природы определяют поведение объекта в той степени, в какой это вообще возможно... Удивительным открытием эпохи Ньютона было как раз ясное отделение законов природы от начальных условий. Первые невообразимо точны, о вторых же мы, в сущности, ничего не знаем».

Начальные условия не подчинены определённым закономерностям, они не определяются однозначно воздействием окружающих тел, между ними (значениями координат и скоростей тел в фиксированный момент времени) не существует связи, т. е. они могут быть любыми.

Начальные условия, можно сказать, зависят от предшествующей эволюции системы, являющейся частью Вселенной. Для решения любой задачи они должны быть определены экспериментально или же заданы с помощью тех или иных соображений, учитывающих реальные обстоятельства постановки рассматриваемой задачи. Корни их значений лежат в прошлом, а не в настоящем.

Проводя чёткое разделение между начальными условиями и законами природы, Ньютон ясно понимал, что можно вычислить орбиту планеты по измеренным начальным значениям её координат и скоростей. Но нельзя установить, почему радиусы орбит планет (точнее, оси эллипсов) имеют определённые значения. Размеры радиусов определяются эволюцией Солнечной системы из газопылевого облака и зависят от начальных параметров этого облака. Кеплер же наряду с установлением кинематических законов движения планет (об этом см. § 2 гл. 3) пытался установить закон для радиусов их орбит. Успеха он здесь не достиг и не мог достичь.

Состояние системы в данный момент времени (начальные условия) не определяется законами природы. Эти законы позволяют лишь определять последующие состояния системы по известному начальному состоянию.

? **1.** Какова структура фундаментальных физических теорий? Поясните на примере механики Ньютона.

2. Выделите общее и различное в структурах физических теорий (например, механика Ньютона) и биологических теорий (например, клеточная теория).

§ 2.12. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

Законы механики справедливы в инерциальных системах отсчёта. Какие системы отсчёта можно считать инерциальными?

Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта

Легко понять, что любая система отсчёта, которая движется равномерно и прямолинейно относительно данной инерциальной системы отсчёта, также является инерциальной.

В самом деле, если тело относительно определённой инерциальной системы отсчёта движется с постоянной скоростью $\vec{v}_2$, то и по отношению к системе отсчёта, которая сама движется со скоростью $\vec{v}$ = const, тело, согласно закону сложения скоростей, также будет двигаться с некоторой новой, но постоянной скоростью (см. формулу (1.30.12))

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v} = \text{const}.$$

Например, машина, движущаяся по шоссе, параллельному железной дороге, со скоростью 100 км/ч вслед за равномерно движущимся со скоростью 60 км/ч поездом, имеет по отношению к поезду постоянную скорость 40 км/ч.

Напротив, любая система отсчёта, движущаяся с ускорением относительно любой инерциальной системы отсчёта, является неинерциальной. Действительно, если $\vec{v}_2$ = const, а скорость $\vec{v}$ изменяется, то $\vec{v}_1$ также будет меняться с течением времени. Если в приведённом выше примере скорость поезда увеличивается, то скорость машины по отношению к поезду не будет постоянной.

Если систему отсчёта, связанную с Землёй, можно рассматривать как инерциальную, то и системы отсчёта, связанные с поездом, движущимся с постоянной скоростью, или с кораблём, плывущим по прямой с неизменной скоростью, также будут инерциальными. Но как только поезд начнёт увеличивать свою скорость, то связанная с ним система перестанет быть инерциальной. Закон инерции и второй закон Ньютона перестанут выполняться, если рассматривать движение по отношению к таким системам.

Геоцентрическая система отсчёта инерциальна лишь приближённо

Геоцентрическая система не является строго инерциальной. Наиболее близка к инерциальной система отсчёта, связанная с Солнцем и неподвижными звёздами. Земля же движется по отношению к этой системе с ускорением. Во-первых, она вращается вокруг своей оси и, во-вторых, движется вокруг Солнца.

Ускорение, обусловленное обращением Земли вокруг Солнца, очень мало, так как велик период обращения (год). Значительно больше (примерно в шесть раз) ускорение, возникшее из-за вращения Земли вокруг оси с периодом $T = 24$ ч. Но и оно невелико. На поверхности Земли у экватора, где это ускорение наибольшее, оно равно

$$a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = 3{,}5\ \text{см/с}^2,$$

т. е. составляет всего 0,35% от ускорения свободного падения $g = 980$ см/с^2. Именно поэтому систему отсчёта, связанную с Землёй, можно приближённо рассматривать как инерциальную[1].

Доказательство вращения Земли

Существуют явления, которые нельзя объяснить, если считать геоцентрическую систему отсчёта инерциальной. К ним относится поворот относительно Земли плоскости колебаний маятника в знаменитом опыте Фуко, доказывающем вращение Земли.

Для большей наглядности и простоты рассмотрим воображаемый опыт на Северном полюсе. Пусть в начальный момент времени маятнику сообщается горизонтальная скорость $\vec{v}_0$. Маятник начнёт колебаться в той вертикальной плоскости, в которой лежит его начальная скорость. Наблюдая за плоскостью колебаний маятника, мы обнаружили бы, что за сутки она поворачивается на 360°.

Действующие на маятник сила притяжения к Земле $\vec{F}_т$ и сила упругости подвеса маятника $\vec{T}$ лежат в той же вертикальной плоскости, что и скорость $\vec{v}_0$ (рис. 2.28). Эти силы не могут вывести скорость маятника из плоскости, в которой она лежала в начальный момент. Таким образом, с течением времени ориентация плоскости колебаний должна

---

[1] Подробнее этот вопрос будет обсуждён в главе 4.

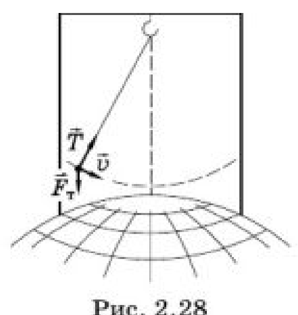


Рис. 2.28

оставаться неизменной. Именно так и обстоит дело в системе отсчёта, связанной с Солнцем и звёздами. Система отсчёта, связанная с Землёй, не является инерциальной и относительно неё плоскость колебаний маятника поворачивается. Чтобы это обнаружить, необходимо подвес осуществить так, чтобы трение в нём было мало, а сам маятник сделать достаточно массивным. Иначе трение в подвесе заставит плоскость колебаний следовать за вращением Земли.

На средних широтах колебание маятника будет выглядеть несколько сложнее, но суть явления не изменится. Впервые такой опыт был проведён Л. Фуко в 1851 г. в Париже. Смещение плоскости колебаний маятника относительно Земли становится заметным уже через несколько минут.

Любая система отсчёта, движущаяся относительно инерциальной системы с постоянной скоростью, также является инерциальной.

? Какой опыт подтверждает неинерциальность геоцентрической системы отсчёта?

§ 2.13. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В МЕХАНИКЕ

Как меняются законы механики при рассмотрении движения в различных инерциальных системах? Ответ прост: они не меняются никак. Существует принцип относительности.

Равномерное прямолинейное движение системы тел не влияет на механические процессы, происходящие внутри неё

Галилей первым обратил внимание на то, что равномерное прямолинейное движение по отношению к Земле не сказывается на течении всех механических процессов.

Допустим, вы находитесь в каюте корабля или в вагоне поезда, движущегося совершенно плавно, без толчков. Вы можете спокойно играть в бадминтон или пинг-понг, если хватит места, точно так же, как и на Земле (рис. 2.29). Волан или

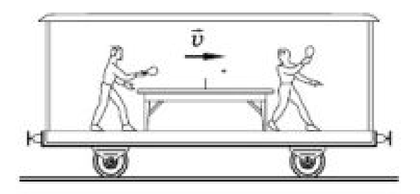


Рис. 2.29

мяч будут по отношению к стенкам и полу перемещаться точно так же, как и по отношению к Земле при игре в обычных условиях. Если не смотреть в окно, то с уверенностью нельзя сказать, что же происходит с поездом: движется он или стоит.

Если в движущемся с постоянной скоростью вагоне изучать падение тел, колебания маятника и другие явления, то результаты будут точно такими же, как и при исследовании этих явлений на Земле. Когда современный реактивный самолёт летит со скоростью около 1000 км/ч, в его салоне не происходит ничего, что позволило бы ощутить эту огромную скорость. Вы можете есть, спать, играть в шахматы, чувствуя себя как дома на Земле.

Лишь при резком торможении поезда нужно прилагать дополнительные усилия, чтобы устоять на ногах. При большой болтанке самолёта или качке парохода на большой волне об игре с мячом не может быть и речи. Все предметы приходится закреплять, для того чтобы они остались на своих местах.

Принцип относительности

На основании подобных наблюдений можно высказать один из самых фундаментальных законов природы — принцип относительности.

Все механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

Это утверждение известно как принцип относительности в механике. Его ещё называют принципом относительности Галилея.

Другая формулировка принципа относительности

Если все механические явления протекают одинаково в различных инерциальных системах, то уравнения движения, описывающие эти явления, не должны меняться при переходе от одной инерциальной системы к другой. Так и есть на самом деле. Ускорения одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Силы зависят от расстояний меж-

ду телами и их относительных скоростей. Так как расстояния и относительные скорости, согласно преобразованиям Галилея (1.30.4), не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, то не меняются и силы. Независимость массы тела от выбора системы отсчёта — важнейший опытный факт механики Ньютона.

Следовательно, второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}(r, v_{от})$$

не будет меняться при переходе от одной инерциальной системы к другой. Не будет меняться и третий закон Ньютона, так как силы не изменяются.

Утверждение о независимости законов механики от выбора инерциальной системы отсчёта является другой формулировкой принципа относительности в механике. Обе формулировки равноценны.

Движение тел в различных инерциальных системах отсчёта

Не следует думать, что выполнение принципа относительности означает полную тождественность движения одного и того же тела относительно различных инерциальных систем отсчёта. Одинаковы лишь законы движения. Характер же движения тела определяется не только законами движения, но и начальными скоростями и начальными координатами. А начальные скорости и начальные координаты данного тела относительно разных систем отсчёта различны. Так, камень будет падать отвесно, если его начальная скорость равна нулю по отношению к Земле. В равномерно движущемся поезде камень также будет падать отвесно по отношению к стенкам вагона, если начальная скорость камня по отношению к поезду равна нулю. Но с точки зрения наблюдателя на Земле камень, падающий отвесно в поезде, будет двигаться по параболе (рис. 2.30).

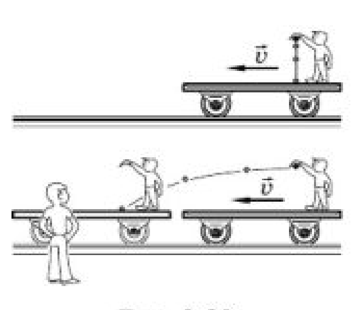


Рис. 2.30

Дело в том, что начальная скорость камня по отношению к системе отсчёта, связанной с Землёй, отлична от нуля и равна скорости поезда.

Специальная теория относительности

В 1905 г. А. Эйнштейн распространил принцип относительности на электромагнитные и любые другие процессы. Благодаря этому принцип относительности стал общим законом природы. Не только механические, но и все другие явления протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

О теории Эйнштейна, называемой специальной теорией относительности, будет рассказано в дальнейшем.

Открытие принципа относительности — одно из величайших достижений человеческого разума. Оно оказалось возможным лишь после того, как люди поняли, что ни Земля, ни Солнце не являются центром Вселенной.

? Покажите, что уравнение второго закона Ньютона не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

§ 2.14. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В этом параграфе мы познакомимся с задачами на применение второго закона Ньютона, для решения которых не нужно знать зависимость сил от расстояний между телами (или частями одного тела) и от их относительных скоростей[1].

Силы, действующие на тела, считаем постоянными (кроме случаев, о которых идёт речь в отдельных качественных задачах).

1. При решении задач нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на тело, движением которого мы интересуемся. Все известные силы надо изобразить на рисунке. При этом нужно отчётливо представлять себе, со стороны каких тел действуют рассматриваемые силы.

Не следует забывать, что действие одного тела на другое является взаимным. Силы взаимодействия подчиняются третьему закону Ньютона.

Может оказаться, что направление силы, которую требуется определить, неизвестно. В процессе решения задачи

---

[1] Силу тяжести, действующую на тела у поверхности Земли, будем считать известной: $\vec{F}_т = m\vec{g}$. Эта формула должна быть вам знакома.

мы найдём проекции этой силы на координатные оси и по проекциям определим модуль силы и её направление. Затем сила может быть изображена на рисунке.

Если в задаче говорится о системе нескольких тел, то изображаются силы, действующие на каждое из тел.

2. Нужно выбрать систему отсчёта, относительно которой рассматривается движение тел. Координатные оси целесообразно располагать так, чтобы проекции сил на эти оси определялись наиболее просто. В случае прямолинейного движения удобно одну из осей направить вдоль этой прямой, а другую перпендикулярно ей.

3. Для каждого тела системы записывается второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots . \qquad (2.14.1)$$

После этого второй закон переписывается для проекций ускорений и сил на оси выбранной системы координат:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots, \\ ma_y &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots . \end{aligned} \qquad (2.14.2)$$

На том или ином этапе решения задачи вместо проекций векторов, направления которых известны, подставляются модули этих проекций с соответствующими знаками перед ними. Эту подстановку можно делать как в исходных уравнениях для проекций (2.14.2), так и в конечной формуле, определяющей ответ задачи.

После того как будет приобретён опыт в решении задач, для экономии времени и бумаги можно сразу записывать уравнения движения для проекций и подставлять в них значения модулей проекций, если знаки проекций известны.

4. Для решения задач о движении системы тел, соединённых тем или иным способом друг с другом, одних уравнений движения недостаточно. Нужно записать ещё так называемые кинематические условия. Эти условия выражают соотношения между ускорениями тел системы, обусловленными связями между ними.

В частности, тела, связанные нерастяжимой нитью, имеют вдоль этой нити одинаковые по модулю ускорения: $a_1 = a_2$. При этом нить может быть перекинута через неподвижные блоки.

При наличии подвижного блока (рис. 2.31) ускорение тела A в два раза больше ускорения тела B, так как за одно и то же время тело A пройдёт вдвое больший путь, чем тело B.

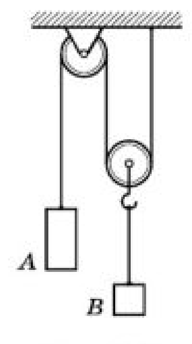


Рис. 2.31

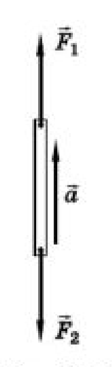


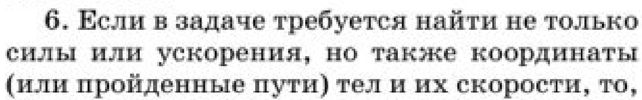
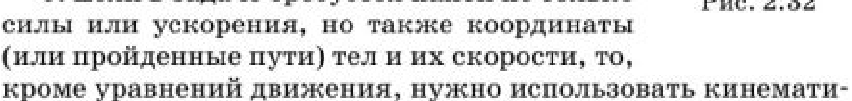
Рис. 2.32

5. Массой нитей, связывающих тела, во всех предлагаемых задачах пренебрегают. Лишь в этом случае натяжение нити одинаково во всех сечениях и одинаковы по модулю силы, действующие на нить со стороны прикреплённых к ней тел (рис. 2.32).

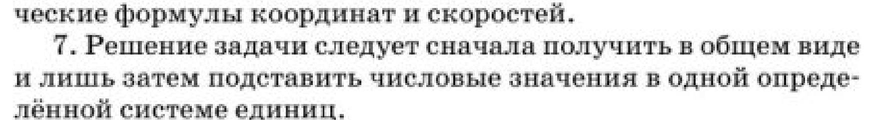
Действительно, пусть на нить действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Согласно второму закону Ньютона, $m_н\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Так как масса нити считается равной нулю ($m_н = 0$), $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $F_1 = F_2$.

По третьему закону Ньютона одинаковы по модулю и силы, которыми нить действует на прикреплённые к ней тела.

Массой всех блоков, встречающихся в условиях задач, также будем пренебрегать. В этом случае натяжение перекинутой через блок нити можно считать одинаковым по обе стороны блока. В противном случае натяжение нити по обе стороны блока будет различным. За счёт различия в натяжении угловая скорость блока, обладающего массой, будет изменяться.

6. Если в задаче требуется найти не только силы или ускорения, но также координаты (или пройденные пути) тел и их скорости, то, кроме уравнений движения, нужно использовать кинематические формулы координат и скоростей.



7. Решение задачи следует сначала получить в общем виде и лишь затем подставить числовые значения в одной определённой системе единиц.

Получив ответ, надо проверить, все ли члены в решении имеют правильные наименования единиц. Такая проверка поможет обнаружить возможную ошибку в расчётах.

Полезно проследить, как будут изменяться найденные величины в зависимости от величин, заданных в условии задачи. Если, к примеру, окажется, что при некоторых значениях заданных в условии величин искомая величина обращается в бесконечность, то это указывает обычно на ошибку в решении или на неприменимость использованной физической модели.

8. Решение задач на динамику движения тела (материальной точки) по окружности принципиально не отличается от решения задач на прямолинейное движение.

Задача 1

При каких условиях тело (материальная точка) движется с постоянным ускорением; движется прямолинейно?

Решение. Ответ на первый вопрос сразу же следует из второго закона Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

(под $\vec{F}$ будем понимать векторную сумму всех сил, действующих на тело). Так как масса тела постоянна, то $\vec{a}$ не будет изменяться ни по модулю, ни по направлению, если сила $\vec{F}$ будет постоянной.

Для прямолинейного движения тела необходимо и достаточно, чтобы вектор силы, действующей на тело, был расположен на одной прямой с вектором начальной скорости.

Действительно, в этом случае приращение скорости за малый интервал времени Δt, равное

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}\Delta t = \frac{\vec{F}}{m}\Delta t,$$

будет направлено вдоль действия силы. Вдоль этой линии будет направлена и скорость $\vec{v}$. В следующий промежуток времени произойдёт тот же процесс. В результате в любой момент времени вектор $\vec{v}$ скорости тела окажется расположенным на одной прямой с вектором силы.

Задача 2

Груз массой $m = 20$ кг поднимают вверх с помощью верёвки так, что в течение первого промежутка времени $\Delta t_1 = 2$ с его скорость меняется от $v_0 = 2$ м/с до $v_1 = 6$ м/с. В последующий промежуток времени $\Delta t_2 = 1$ с скорость уменьшается до значения $v_2 = 2$ м/с. Найдите модули сил, с которыми верёвка действовала на груз в промежутки времени Δt_1 и Δt_2, считая эти силы постоянными.

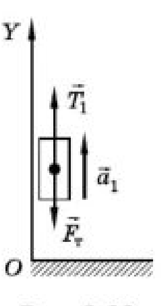


Рис. 2.33

Решение. В течение первого промежутка времени на тело действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, направленная вниз, и сила натяжения верёвки $\vec{T}_1$, направленная вверх (рис. 2.33). Координатную ось Y направим вертикально вверх.

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{F}_т.$$

В проекциях на ось Y это уравнение запишется так:

$$ma_{1y} = T_{1y} + F_{тy}.$$

При выбранном направлении оси Y

$$T_{1y} = T_1, F_{тy} = -mg.$$

Отсюда

$$T_1 = m(g + a_{1y}). \qquad (2.14.3)$$

Для нахождения силы надо определить проекцию a_{1y} ускорения с помощью кинематической формулы скорости при движении с постоянным ускорением:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t.$$

В проекциях на ось Y будем иметь

$$v_{1y} = v_{0y} + a_{1y}\Delta t_1.$$

Учитывая, что $v_{1y} = v_1$ и $v_{0y} = v_0$, получим

$$a_{1y} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1} = 2 \text{ м/с}^2. \qquad (2.14.4)$$

Проекция $a_{1y} > 0$; это означает, что ускорение тела $\vec{a}_1$ направлено в положительном направлении оси Y, в данном случае вверх.

Подставляя в уравнение (2.14.3) найденное значение a_{1y}, определим модуль силы $\vec{T}_1$:

$$T_1 = m\left(g + \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1}\right) = 236 \text{ Н}.$$

При решении второй части задачи учтём, что формулы (2.14.3) и (2.14.4) остаются справедливыми. Нужно только индекс «1» заменить на индекс «2» и вместо начальной скорости v_0 взять скорость v_1. Тогда

$$a_{2y} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2}.$$

Проекция $a_{2y} = -4$ м/с^2; это означает, что ускорение тела $\vec{a}_2$ направлено против положительного направления оси Y, т. е. вниз. Искомая сила

$$T_2 = m\left(g + \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2}\right) = 116 \text{ Н}.$$

Задача 3

На невесомом стержне равномерно вращается в вертикальной плоскости груз массой $m = 0{,}9$ кг. Модуль скорости груза $\upsilon = 3$ м/с, длина стержня $l = 1$ м. Найдите, с какой по модулю силой и в каком направлении стержень действует на груз в тот момент, когда стержень занимает горизонтальное положение.

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, направленная вниз, и сила реакции $\vec{F}$ со стороны стержня (рис. 2.34, *а*). Так как направление силы $\vec{F}$ нам неизвестно, то её на рисунке не изображаем. При равномерном движении по окружности груз имеет лишь нормальное ускорение $\vec{a}_n$, направленное к оси вращения стержня. Оси координат X и Y выберем так, как показано на рисунке 2.34, *а*.

Так как нам неизвестны ни модуль, ни направление силы $\vec{F}$, то необходимо найти её проекции на оси координат.

Согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_т.$$

В проекциях на оси координат получим

$$ma_x = F_x + F_{тx},\ ma_y = F_y + F_{тy}.$$

В данном случае $F_{тy} = -mg$, $a_y = 0$, $F_{тx} = 0$ и $a_x = a_n = \frac{\upsilon^2}{l}$.

Теперь система уравнений для проекций примет следующий вид:

$$F_x = \frac{m\upsilon^2}{l} = 8{,}1 \text{ Н},$$
$$F_y = mg = 8{,}82 \text{ Н}.$$

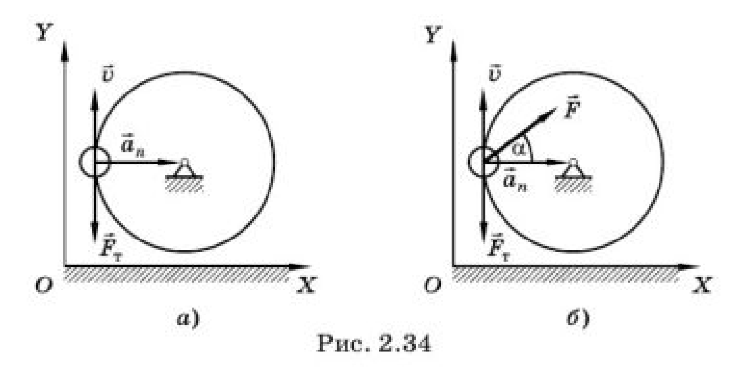


Рис. 2.34

Найдём модуль силы $\vec{F}$:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx 12 \text{ Н}.$$

Направление силы $\vec{F}$ определяется углом, который она образует, например, с осью X:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = 0{,}676, \quad \alpha = 47{,}5°.$$

Итак, стержень действует на груз с силой, модуль которой равен 12 Н. Направлена сила под углом 47,5° к стержню внутрь окружности, по которой движется груз (рис. 2.34, *б*).

Задача 4

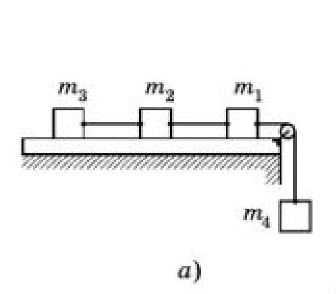
На гладкой горизонтальной поверхности расположены три тела массами m_1, m_2 и m_3, связанные нерастяжимыми нитями друг с другом (рис. 2.35, *а*). К телу массой m_1 прикреплена перекинутая через блок нить, на конце которой находится груз массой m_4. Найдите модули ускорений тел системы и сил натяжения $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$ всех нитей. Массами нитей и блока пренебречь.

Решение. Силы, действующие на тела, изображены на рисунке 2.35, *б*. При этом силы, действующие по вертикали на тела массами m_1, m_2 и m_3, взаимно уравновешиваются и их рассмотрение не требуется для решения задачи.

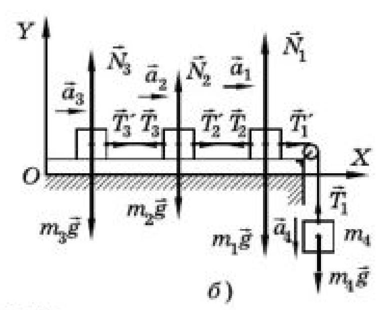
Ось X направим горизонтально слева направо, а ось Y — вертикально вверх.

Уравнения движения для проекций ускорений и сил на оси X и Y для всех четырёх тел будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} m_1a_{1x} &= T'_{1x} + T_{2x}, \\ m_2a_{2x} &= T'_{2x} + T_{3x}, \\ m_3a_{3x} &= T'_{3x}, \\ m_4a_{4y} &= m_4g_y + T_{1y}. \end{aligned} \qquad (2.14.5)$$



а)



б)

Рис. 2.35

Вследствие нерастяжимости нитей модули ускорений равны: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$. Так как массами нитей и блоков пренебрегаем, то с учётом положительных направлений осей X и Y имеем

$$\begin{aligned} T'_{1x} &= T_1, T_{1y} = T_1, \\ T'_{2x} &= T_2, T_{2x} = -T_2, \\ T'_{3x} &= T_3, T_{3x} = -T_3, \\ m_4 g_y &= -m_4 g, a_{1x} = a, \\ a_{2x} &= a, a_{3x} = a, a_{4y} = -a. \end{aligned} \qquad (2.14.6)$$

Уравнения для модулей ускорений и сил с учётом соотношений (2.14.5) и (2.14.6) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 a &= T_1 - T_2, \\ m_2 a &= T_2 - T_3, \\ m_3 a &= T_3, \\ -m_4 a &= -m_4 g + T_1. \end{aligned} \qquad (2.14.7)$$

Складывая три первых уравнения и вычитая из полученной суммы четвёртое уравнение, получим

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)a = m_4 g,$$

откуда

$$a = \frac{m_4 g}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \qquad (2.14.8)$$

Подставляя найденное значение a поочерёдно во все уравнения движения системы (2.14.7), начиная с последнего, получим

$$T_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_4 g,$$

$$T_2 = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_4 g, \qquad (2.14.9)$$

$$T_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_4 g.$$

Обратите внимание на то, что сила натяжения T_1 первой нити не равна силе тяжести $m_4 g$, как это было бы для покоящегося тела, а меньше в отношение

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

чии подвижного блока $a_1 = 2a_2$. Так как ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направлены в противоположные стороны, то $a_{1y} = -2a_{2y}$.

Исключая силу натяжения T_2 из системы уравнений (2.14.10) и используя кинематическое условие связи ускорений, получим

$$\begin{cases} -2m_1a_{2y} = T_1 - m_1g, \\ m_2a_{2y} = 2T_1 - m_2g. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдём

$$a_{2y} = \frac{g(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} = 2{,}8 \text{ м/с}^2,$$

$$T_1 = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2} = 12{,}6 \text{ Н}.$$

Учитывая, что $T_2 = 2T_1$, получим $T_2 = 25{,}2$ Н. Так как $a_{2y} > 0$, то ускорение $\vec{a}_2$ направлено вверх.

Проекция ускорения первого тела $a_{1y} = -2a_{2y} \approx -6$ м/с^2. Модуль ускорения $a_1 \approx 6$ м/с^2. Знак «минус» у проекции ускорения $\vec{a}_1$ показывает, что ускорение первого тела направлено противоположно оси Y, т. е. вниз.

Упражнение 7

1. На шар действует приложенная к его центру сила, совпадающая по направлению со скоростью шара. Модуль силы изменяется с течением времени так, как показано на рисунке 2.37. Какое движение совершает шар и в какой момент времени его скорость максимальна?
2. Проекция F_x силы, действующей на тело, изменяется со временем так, как показано на рисунке 2.38. Сила направлена вдоль оси X. Начальная скорость и координата тела равны нулю. Начертите графики зависимости проекции скорости $\upsilon_x(t)$ и координаты $x(t)$ от времени.

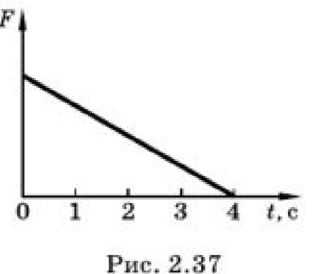


Рис. 2.37

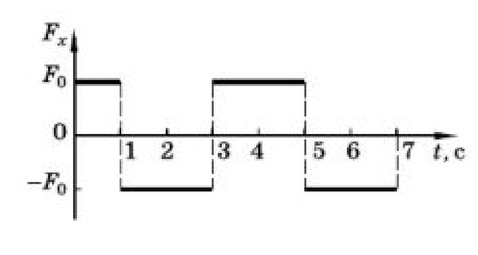


Рис. 2.38

3. Координата тела массой $m = 0{,}1$ кг меняется в зависимости от времени по закону $x = 15\ \text{м/с}^2 \cdot t^2 + 2\ \text{м/с} \cdot t$. Найдите проекцию на ось X силы, действующей на тело.

4. Груз массой m, подвешенный на нити длиной L, равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости (конический маятник). Нить описывает коническую поверхность, составляя с вертикалью угол α. Найдите период T обращения груза. Чему должна быть равна максимальная сила натяжения нити F, чтобы радиус окружности, по которой движется груз, мог достигнуть значения $\frac{2L}{\sqrt{5}}$?

5. Во время автомобильной катастрофы машина, двигавшаяся со скоростью $\upsilon = 54$ км/ч, налетела на бетонную стену. При этом передняя часть машины смялась так, что её длина уменьшилась на $l_1 = 0{,}5$ м. Какая постоянная сила должна действовать на пассажира со стороны ремня безопасности, чтобы он не разбил головой ветровое стекло? Расстояние от головы пассажира до ветрового стекла $l_2 = 0{,}5$ м. Масса пассажира $m = 60$ кг.

6. К концу невесомого стержня длиной 1 м прикреплён небольшой шарик массой 0,1 кг; другой конец стержня закреплён на горизонтальной оси. Стержень равномерно вращается в вертикальной плоскости. С какой по модулю силой и в каком направлении шарик действует на стержень при прохождении наивысшей точки траектории, если скорость шарика: 6 м/с; 3,2 м/с; 1 м/с?

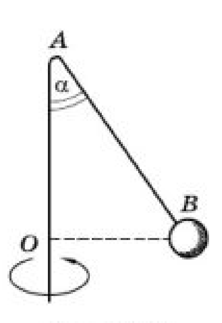


Рис. 2.39

7. Невесомый стержень изогнут под углом $\alpha = 30°$ (рис. 2.39). На конце участка стержня AB длиной 80 см закреплён маленький шарик массой 1 кг. Система вращается вокруг вертикального участка стержня так, что скорость шарика равна 2 м/с. С какой по модулю силой и в каком направлении стержень действует на шарик?

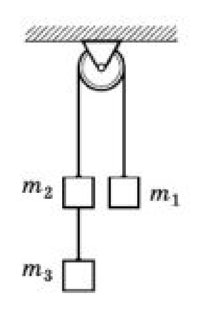


Рис. 2.40

8. Найдите модули ускорения грузов и сил натяжения нитей для системы грузов, изображённой на рисунке 2.40. Массой

нитей и блока, а также трением в оси блока пренебречь. Массы грузов соответственно равны 1, 2 и 3 кг.

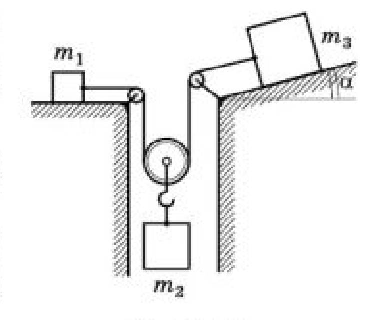


Рис. 2.41

9. На рисунке 2.41 изображена система движущихся тел, имеющих массы $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = m$. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Трение отсутствует. Определите силы натяжения нитей.

10. На рисунке 2.42 показаны графики *1*, *2* зависимости модуля силы, удерживающей тело на окружности, от её радиуса. В одном случае это гипербола, а в другом — прямая. Как объяснить это кажущееся противоречие?

11. Конус с углом раствора 2α вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 2.43). В конусе находится шарик массой m, прикреплённый к внутренней поверхности конуса с помощью нити. Радиус окружности, по которой обращается шарик, равен R. Найдите силу натяжения нити T и силу давления шарика P на поверхность конуса. Трение не учитывать.

12. Как определить направление вращения ротора двигателя кофемолки, если её корпус непрозрачен?

13. На оси центробежной машины закреплена нить длиной $l = 12{,}5$ см, на конце которой находится маленький шарик (рис. 2.44). Найдите угол α между нитью и вертикалью, если машина вращается с частотой $\nu_1 = 1$ Гц ($\nu_2 = 2$ Гц).

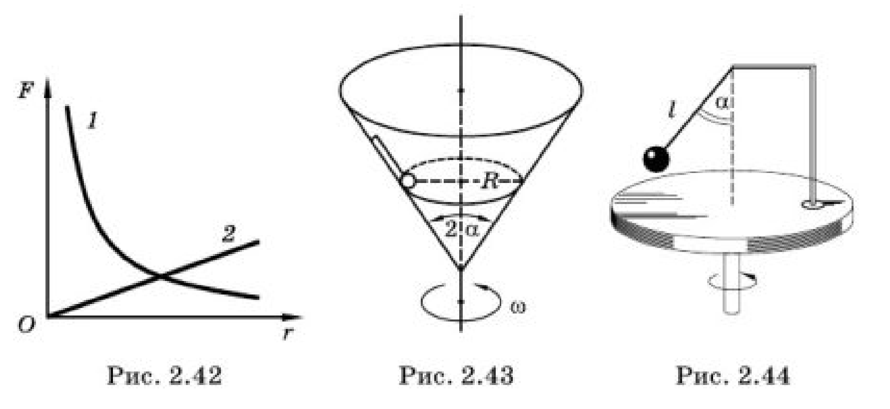


Рис. 2.42 Рис. 2.43 Рис. 2.44

1. Соберите видеоколлекцию по теме «Неинерциальные системы отсчёта».
2. Подготовьте материал для дискуссии «Человек: материальная точка или Вселенная».
3. Подготовьте доклад «Развитие представлений об инерции: учёные, опыты».
4. Поясните смысл фразы «Покой нам только снится».
5. Как можно оценить силу (мышечную, интеллектуальную) человека?
6. Подготовьте сообщение «Как появилось понятие «масса» в физике?».
7. Выполняется ли третий закон Ньютона во взаимодействии между людьми?
8. Подготовьте доклад «Системы единиц: возникновение, структура и содержание».
9. Подготовьте доклад «Какие задачи решали Аристотель, Галилей и Ньютон?».
10. Подготовьте доклад «Численные методы в физике — от Ньютона до настоящих дней».
11. Какова этимология (происхождение) слова «принцип»? Выделите общее и различное в интерпретации термина «принцип» в физике (на примере принципа относительности в механике) и в психологии (на примере принципа непрерывного развития). Ответ представьте в виде таблицы.
12. Люди каких профессий работают в Центре управления полётами (ЦУП)? Какими знаниями, умениями, способностями и качествами обладают люди этих профессий? Ответ представьте в виде таблицы.

Название профессии	Должностные обязанности	Знания	Умения	Способности и качества

Где обучают этим профессиям?

Глава 3

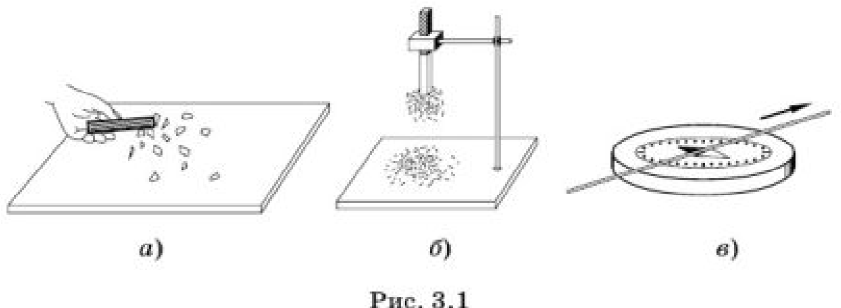
СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

В главе 2 мы ввели понятие силы как количественной меры действия одного тела на другое. В этой главе мы рассмотрим, какие силы встречаются в механике, чем определяются их значения.

§ 3.1. СИЛЫ В ПРИРОДЕ

Выясним, много ли видов сил существует в природе.

На первый взгляд кажется, что мы взялись за непосильную и неразрешимую задачу: тел на Земле и вне её бесконечное множество. Они взаимодействуют по-разному. Так, например, камень падает на Землю; электровоз тянет поезд; нога футболиста ударяет по мячу; потёртая о мех эбонитовая палочка притягивает лёгкие бумажки (рис. 3.1, *а*); магнит



а) *б*) *в*)

Рис. 3.1

притягивает железные опилки (рис. 3.1, *б*); проводник с током поворачивает стрелку компаса (рис. 3.1, *в*); взаимодействуют Луна и Земля, а вместе они взаимодействуют с Солнцем; взаимодействуют звёзды и звёздные системы и т. д. и т. п. Подобным примерам нет конца. Похоже, что в природе существует бесконечное множество взаимодействий (сил)! Оказывается, нет!

Четыре типа сил

В безграничных просторах Вселенной, на нашей планете, в любом веществе, в живых организмах, в атомах, в атомных ядрах и в мире элементарных частиц мы встречаемся с проявлением всего лишь четырёх типов сил: гравитационных, электромагнитных, сильных (ядерных) и слабых.

Гравитационные силы, или силы всемирного тяготения, действуют между всеми телами — все тела притягиваются друг к другу. Но это притяжение существенно лишь тогда, когда хотя бы одно из взаимодействующих тел так же велико, как Земля или Луна. Иначе эти силы столь малы, что ими можно пренебречь.

Электромагнитные силы действуют между частицами, имеющими электрические заряды. Сфера их действия особенно обширна и разнообразна. В атомах, молекулах, твёрдых, жидких и газообразных телах, живых организмах именно электромагнитные силы являются главными. Велика их роль в атомных ядрах.

Область действия ядерных сил очень ограничена. Они сказываются заметным образом только внутри атомных ядер (т. е. на расстояниях порядка 10^{-12} см). Уже на расстояниях между частицами порядка 10^{-11} см (в тысячу раз меньших размеров атома — 10^{-8} см) они не проявляются совсем.

Слабые взаимодействия проявляются на ещё меньших расстояниях. Они вызывают превращения элементарных частиц друг в друга.

Если энергию сильного взаимодействия двух протонов на расстоянии порядка 10^{-13} см принять за единицу, то энергия их электромагнитного взаимодействия составит 10^{-2}, гравитационного — 10^{-38}, слабого — 10^{-14}.

Надо сказать, что лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия можно рассматривать как силы в смысле механики Ньютона. Сильные (ядерные) и слабые взаимодействия проявляются на таких малых расстояниях, когда законы механики Ньютона, а с ними вместе и понятие

механической силы теряют смысл. Если и в этих случаях употребляют термин «сила», то лишь как синоним слова «взаимодействие».

Силы в механике

В механике обычно имеют дело с силами тяготения, силами упругости и силами трения.

Мы не будем здесь рассматривать электромагнитную природу силы упругости и силы трения. С помощью опытов можно выяснить условия, при которых возникают эти силы, и выразить их количественно.

В природе существует четыре типа сил. В механике изучаются гравитационные силы и две разновидности электромагнитных сил — силы упругости и силы трения.

? 1. Какие типы сил существуют в природе? Какова физическая природа сил, с которыми имеют дело в задачах механики?

2.° Какой(ие) критерий(и) положен(ы) в основу классификации сил на четыре типа?

§ 3.2. СИЛА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

В этом параграфе мы расскажем об удивительной догадке Ньютона, приведшей к открытию закона всемирного тяготения.

Почему выпущенный из рук камень падает на Землю? Потому что его притягивает Земля, скажет каждый из вас. В самом деле, камень падает на Землю с ускорением свободного падения. Следовательно, на камень со стороны Земли действует сила, направленная к Земле. Согласно третьему закону Ньютона, и камень действует на Землю с такой же по модулю силой, направленной к камню. Иными словами, между Землёй и камнем действуют силы взаимного притяжения.

Догадка Ньютона

Ньютон был первым, кто сначала догадался, а потом и строго доказал, что причина, вызывающая падение камня на Землю, движение Луны вокруг Земли и планет вокруг Солнца, одна и та же. Это сила тяготения, действующая между любыми телами Вселенной. Вот ход его рассуждений,

приведённых в главном труде Ньютона «Математические начала натуральной философии»: «Брошенный горизонтально камень отклонится под действием тяжести от прямолинейного пути и, описав кривую траекторию, упадёт наконец на Землю. Если его бросить с большей скоростью, то он упадёт дальше» (рис. 3.2). Продолжая эти рассуждения, Ньютон приходит к выводу, что если бы не сопротивление воздуха, то траектория камня, брошенного с высокой горы с определённой скоростью, могла бы стать такой, что он вообще никогда не достиг бы поверхности Земли, а двигался бы вокруг неё «подобно тому, как планеты описывают в небесном пространстве свои орбиты».

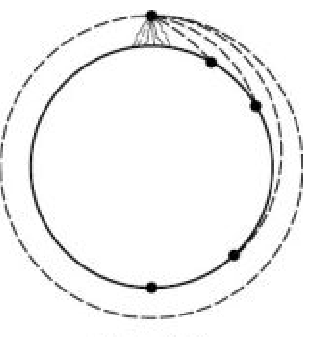


Рис. 3.2

Сейчас нам стало настолько привычным движение спутников вокруг Земли, что разъяснять мысль Ньютона подробнее нет необходимости.

Итак, по мнению Ньютона, движение Луны вокруг Земли или планет вокруг Солнца — это тоже свободное падение, но только падение, которое длится, не прекращаясь, миллиарды лет. Причиной такого «падения» (идёт ли речь действительно о падении обычного камня на Землю или о движении планет по их орбитам) является *сила всемирного тяготения*. От чего же эта сила зависит?

Зависимость силы тяготения от массы тел

В § 1.23 говорилось о свободном падении тел. Упоминались опыты Галилея, доказавшие, что Земля сообщает всем телам в данном месте одно и то же ускорение независимо от их массы. Это возможно лишь в том случае, если сила притяжения к Земле прямо пропорциональна массе тела. Именно в этом случае ускорение свободного падения, равное отношению силы земного притяжения к массе тела, является постоянной величиной.

Действительно, в этом случае увеличение массы m, например, вдвое приведёт к увеличению модуля силы $\vec{F}$ тоже вдвое, а ускорение, которое равно отношению $\frac{\vec{F}}{m}$, останется неизменным.

Обобщая этот вывод для сил тяготения между любыми телами, заключаем, что сила всемирного тяготения прямо

пропорциональна массе тела, на которое эта сила действует. Но во взаимном притяжении участвуют по меньшей мере два тела. На каждое из них, согласно третьему закону Ньютона, действуют одинаковые по модулю силы тяготения. Поэтому каждая из этих сил должна быть пропорциональна как массе одного тела, так и массе другого тела.

Поэтому *сила всемирного тяготения между двумя телами прямо пропорциональна произведению их масс*:

$$F \sim m_1 m_2. \tag{3.2.1}$$

От чего ещё зависит сила тяготения, действующая на данное тело со стороны другого тела?

Зависимость силы тяготения от расстояния между телами

Можно предположить, что сила тяготения должна зависеть от расстояния между телами. Чтобы проверить правильность этого предположения и найти зависимость силы тяготения от расстояния между телами, Ньютон обратился к движению спутника Земли — Луны. Её движение было в те времена изучено гораздо точнее, чем движение планет.

Обращение Луны вокруг Земли происходит под действием силы тяготения между ними. Приближённо орбиту Луны можно считать окружностью. Следовательно, Земля сообщает Луне центростремительное ускорение. Оно вычисляется по формуле

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

где R — радиус лунной орбиты, равный примерно 60 радиусам Земли, T = 27 сут 7 ч 43 мин = $2{,}4 \cdot 10^6$ с — период обращения Луны вокруг Земли. Учитывая, что радиус Земли $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, получим, что центростремительное ускорение Луны равно

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м}}{(2{,}4 \cdot 10^6 \text{ с})^2} \approx 0{,}0027 \text{ м/с}^2.$$

Найденное значение ускорения меньше ускорения свободного падения тел у поверхности Земли (9,8 м/с²) приблизительно в $3600 = 60^2$ раз.

Таким образом, увеличение расстояния между телом и Землёй в 60 раз привело к уменьшению ускорения, сообщае-

мого земным притяжением, а следовательно, и самой силы притяжения в 60^2 раз[1].

Отсюда вытекает важный вывод: *ускорение, которое сообщает телам сила притяжения к Земле, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли*:

$$a = \frac{C_1}{R^2}, \qquad (3.2.2)$$

где C_1 — постоянный коэффициент, одинаковый для всех тел.

Законы Кеплера

Исследование движения планет показало, что это движение вызвано силой притяжения к Солнцу. Используя тщательные многолетние наблюдения датского астронома Тихо Браге, немецкий учёный Иоганн Кеплер в начале XVII в. установил кинематические законы движения планет — так называемые законы Кеплера.

Первый закон Кеплера

Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Эллипсом (рис. 3.3) называется плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна. Эта сумма расстояний равна длине большой оси AB эллипса, т. е.

$$F_1P + F_2P = 2b,$$

Рис. 3.3

Рис. 3.4

[1] Интересно, что, будучи студентом, Ньютон понял, что Луна движется под влиянием притяжения к Земле. Но в то время радиус Земли был известен неточно, и расчёты не привели к правильному результату $\left(a \sim \frac{1}{R^2}\right)$. Лишь спустя 16 лет появились новые, исправленные данные, и закон всемирного тяготения был опубликован.

где F_1 и F_2 — фокусы эллипса, $ab = \frac{AB}{2}$ — его большая полуось, O — центр эллипса. Ближайшая к Солнцу точка орбиты называется перигелием, а самая далёкая от него точка — афелием. Если Солнце находится в фокусе F_1 (см. рис. 3.3), то точка A — перигелий, а точка B — афелий.

Второй закон Кеплера

Радиус-вектор планеты, соединяющий её с фокусом, за одинаковые промежутки времени описывает равные площади. Так, если заштрихованные секторы (рис. 3.4) имеют одинаковые площади, то пути s_1, s_2, s_3 будут пройдены планетой за равные промежутки времени. Из рисунка видно, что $s_1 > s_2$. Следовательно, линейная скорость движения планеты в различных точках её орбиты неодинакова. В перигелии скорость планеты наибольшая, в афелии — наименьшая.

Третий закон Кеплера

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит. Обозначив большую полуось орбиты и период обращения одной из планет через b_1 и T_1, а другой — через b_2 и T_2, третий закон Кеплера можно записать так:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3}. \qquad (3.2.3)$$

Из этой формулы видно, что чем дальше планета от Солнца, тем больше её период обращения вокруг Солнца.

На основании законов Кеплера можно сделать определённые выводы об ускорениях, сообщаемых планетам Солнцем. Мы для простоты будем считать орбиты не эллиптическими, а круговыми. Для планет Солнечной системы эта замена не является слишком грубым приближением.

Тогда сила притяжения со стороны Солнца в этом приближении должна быть направлена для всех планет к центру Солнца.

Если через T обозначить периоды обращения планет, а через R — радиусы их орбит, то, согласно третьему закону Кеплера, для двух планет можно записать

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}. \qquad (3.2.4)$$

Нормальное ускорение при движении по окружности $a = \omega^2 R$. Поэтому отношение ускорений планет

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{T_2^2}{T_1^2}\frac{R_1}{R_2}. \qquad (3.2.5)$$

Используя уравнение (3.2.4), получим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Так как третий закон Кеплера справедлив для всех планет, то ускорение каждой планеты обратно пропорционально квадрату расстояния её до Солнца:

$$a = \frac{C_2}{R^2}. \qquad (3.2.6)$$

Постоянная C_2 одинакова для всех планет, но не совпадает с постоянной C_1 в формуле для ускорения, сообщаемого телам земным шаром.

Выражения (3.2.2) и (3.2.6) показывают, что сила тяготения в обоих случаях (притяжение к Земле и притяжение к Солнцу) сообщает всем телам ускорение, не зависящее от их массы и убывающее обратно пропорционально квадрату расстояния между ними:

$$F \sim a \sim \frac{1}{R^2}. \qquad (3.2.7)$$

Закон всемирного тяготения

Существование зависимостей (3.2.1) и (3.2.7) означает, что сила всемирного тяготения

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

В 1667 г. Ньютон окончательно сформулировал закон всемирного тяготения:

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}.} \qquad (3.2.8)$$

Сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Коэффициент пропорциональности G называется *гравитационной*[1] *постоянной*.

[1] От латинского слова gravitas — «тяжесть».

Взаимодействие точечных и протяжённых тел

Закон всемирного тяготения (3.2.8) справедлив только для таких тел, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними. Иначе говоря, он справедлив только для материальных точек. При этом силы гравитационного взаимодействия направлены вдоль линии, соединяющей эти точки (рис. 3.5). Подобного рода силы называются центральными.

Для нахождения силы тяготения, действующей на данное тело со стороны другого, в случае, когда размерами тел пренебречь нельзя, поступают следующим образом. Оба тела мысленно разделяют на столь малые элементы, чтобы каждый из них можно было считать точечным. Складывая силы тяготения, действующие на каждый элемент данного тела со стороны всех элементов другого тела, получают силу, действующую на этот элемент (рис. 3.6). Проделав такую операцию для каждого элемента данного тела и сложив полученные силы, находят полную силу тяготения, действующую на это тело. Задача эта сложная.

Есть, однако, один практически важный случай, когда формула (3.2.8) применима к протяжённым телам. Можно доказать, что сферические тела, плотность которых зависит только от расстояний до их центров, при расстояниях между ними, бо́льших суммы их радиусов, притягиваются с силами, модули которых определяются формулой (3.2.8). В этом случае R — это расстояние между центрами шаров.

И наконец, так как размеры падающих на Землю тел много меньше размеров Земли, то эти тела можно рассматривать как точечные. Тогда под R в формуле (3.2.8) следует понимать расстояние от данного тела до центра Земли.

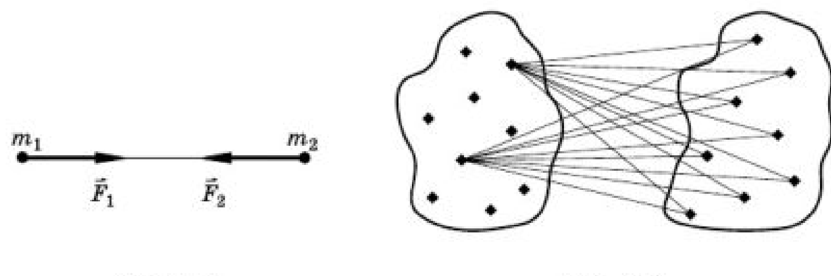


Рис. 3.5 Рис. 3.6

Между всеми телами действуют силы взаимного притяжения, зависящие от самих тел (их масс) и от расстояния между ними.

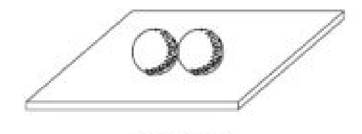


Рис. 3.7



? 1. Расстояние от Марса до Солнца на 52% больше расстояния от Земли до Солнца. Какова продолжительность года на Марсе?

2. Как изменится сила притяжения между шарами, если алюминиевые шары (рис. 3.7) заменить стальными шарами той же массы; того же объёма?

3. Как связаны между собой кинематические законы движения планет (законы Кеплера) и закон всемирного тяготения?

§ 3.3. ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ

Выясним физический смысл гравитационной постоянной. Чему она равна, как была измерена?

Физический смысл гравитационной постоянной

Из формулы (3.2.8) находим:

$$G = \frac{FR^2}{m_1 m_2}. \qquad (3.3.1)$$

Отсюда следует, что если расстояние между телами численно равно единице ($R = 1$ м) и массы взаимодействующих тел тоже равны единице ($m_1 = m_2 = 1$ кг), то гравитационная постоянная численно равна модулю силы $\vec{F}$. Таким образом, *гравитационная постоянная численно равна модулю силы тяготения, действующей на тело массой* 1 кг *со стороны другого тела такой же массы при расстоянии между телами, равном* 1 м.

Из формулы (3.3.1) также видно, что в СИ гравитационная постоянная выражается в $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Опыт Кавендиша

Значение гравитационной постоянной G может быть найдено только опытным путём. Для этого, как видно из формулы (3.3.1), надо измерить модуль силы тяготения $\vec{F}$, действу-

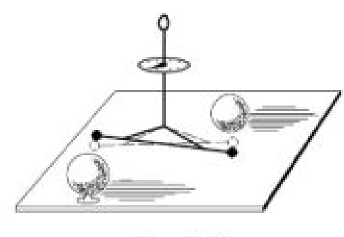


Рис. 3.8



ющей на тело массой m_1 со стороны тела массой m_2 при известном расстоянии R между телами.

Впервые гравитационная постоянная была измерена английским физиком Г. Кавендишем в 1798 г. с помощью прибора, называемого крутильными весами. Схематично крутильные весы показаны на рисунке 3.8. Кавендиш закрепил два маленьких свинцовых шара (диаметром 5 см и массой 775 г каждый) на противоположных концах двухметрового стержня. Стержень был подвешен на тонкой проволоке. Для этой проволоки предварительно определялись силы упругости, возникающие в ней при закручивании на различные углы. Два больших свинцовых шара (диаметром 20 см и массой 49,5 кг) можно было близко подводить к маленьким шарам. Силы притяжения со стороны больших шаров заставляли маленькие шары перемещаться к ним, при этом натянутая проволока немного закручивалась. Степень закручивания была мерой силы, действующей между шарами. Угол закручивания проволоки (или поворота стержня с малыми шарами) оказался столь малым, что его пришлось измерять с помощью оптической трубы. Результат, полученный Кавендишем, только на 1% отличается от значения гравитационной постоянной, принятого сегодня:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Таким образом, силы притяжения двух тел массой по 1 кг каждое, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга, по модулям равны всего лишь $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н. Это очень малая сила. Только в том случае, когда взаимодействуют тела огромной массы (или по крайней мере масса одного из тел велика), сила тяготения становится большой. Например, Земля притягивает Луну с силой $F = 2 \cdot 10^{20}$ Н.

Гравитационные силы — самые «слабые» из всех сил природы. Это связано с тем, что гравитационная постоянная мала. Но при больших массах космических тел силы всемирного тяготения становятся очень большими. Эти силы удерживают все планеты возле Солнца.

? Аргументируйте на конкретных расчётах тезис: «Гравитационные силы — самые „слабые“ из всех сил природы».

зал немецкому астроному Галле место, где надо искать неизвестную планету. В первый же вечер, 28 сентября 1846 г., Галле, направив телескоп на указанное место, обнаружил новую планету. Её назвали Нептуном. Это открытие, как говорят, было сделано «на кончике пера».

В § 3.2 мы говорили, что закон всемирного тяготения Ньютон открыл, используя законы движения планет — законы Кеплера. Правильность открытого Ньютоном закона всемирного тяготения подтверждается и тем, что с помощью этого закона и второго закона Ньютона можно вывести законы Кеплера. Мы не будем приводить этот вывод.

С помощью закона всемирного тяготения можно вычислить массу планет и их спутников; объяснить такие явления, как приливы и отливы воды в океанах, и многое другое.

Гравитационной «тени» нет

Силы всемирного тяготения — самые универсальные из всех сил природы. Они действуют между любыми телами, обладающими массой, а массу имеют все тела. Для сил тяготения не существует никаких преград. Они действуют сквозь любые тела. Экраны из особых веществ, непроницаемых для гравитации (вроде «кеворита» из романа Г. Уэллса «Первые люди на Луне»), могут существовать только в воображении авторов научно-фантастических книг.

Стремительное развитие механики началось после открытия закона всемирного тяготения. Стало ясно, что одни и те же законы действуют на Земле и в космическом пространстве.

? Приведите пример открытия, сделанного в физике на основе закона всемирного тяготения.

§ 3.5. РАВЕНСТВО ИНЕРТНОЙ И ГРАВИТАЦИОННОЙ МАСС

Самым поразительным свойством гравитационных сил является то, что они в данной точке пространства сообщают всем телам, независимо от их массы, одно и то же ускорение.

Что бы вы сказали о футболисте, удар которого одинаково ускорил бы обыкновенный мяч и двухпудовую гирю? Каж-

дый скажет, что это невозможно. А вот Земля является именно таким необыкновенным «футболистом», с той только разницей, что действие её на тела не носит характера кратковременного удара, а продолжается непрерывно миллиарды лет.

Необыкновенное свойство гравитационных сил, как мы уже говорили (см. § 3.2), объясняется тем, что эти силы пропорциональны массам обоих взаимодействующих тел. Факт этот не может не вызвать удивления, если над ним хорошенько задуматься. Ведь масса, которая входит во второй закон Ньютона, определяет инертные свойства тела, т. е. его способность приобретать определённое ускорение под действием данной силы. Эту массу естественно назвать **инертной массой** m_i.

Казалось бы, какое отношение она может иметь к способности тел притягивать друг друга? Массу, определяющую способность тел притягиваться друг к другу, следовало бы назвать **гравитационной массой** m_g.

Из механики Ньютона совсем не следует, что инертная и гравитационная массы одинаковы, т. е. что

$$m_i = m_g. \qquad (3.5.1)$$

Равенство (3.5.1) следует непосредственно из опыта. Оно означает, что можно говорить просто о массе тела как количественной мере и инертных, и гравитационных его свойств.

Опытный факт равенства инертной и гравитационной масс в рамках классической механики выглядит случайным. Лишь в общей теории относительности, построенной А. Эйнштейном, равенство гравитационной и инертной масс положено в основу новой теории тяготения, обобщающей простую теорию тяготения Ньютона. Но обсуждение этого вопроса выходит за рамки механики Ньютона.

Масса тела является количественной мерой его инертных и гравитационных свойств.

? ° Можно ли утверждать, что факт равенства инертной и гравитационной масс следует из опытов Галилея?

§ 3.6. СИЛА ТЯЖЕСТИ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Расскажем теперь более подробно о силе притяжения тел Землёй и о том, как была «взвешена» сама Земля.

Сила тяжести

Частным, но крайне важным для нас видом силы всемирного тяготения является сила притяжения тел к Земле. Эту силу называют **силой тяжести**. Согласно закону всемирного тяготения, она выражается формулой

$$F_т = G\frac{mM}{(R+h)^2}, \qquad (3.6.1)$$

где m — масса тела, M — масса Земли, R — радиус Земли, h — высота тела над поверхностью Земли. Сила тяжести направлена вертикально вниз, к центру Земли.

Сила тяжести сообщает телу ускорение, называемое ускорением свободного падения. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_т}{m}. \qquad (3.6.2)$$

С учётом выражения (3.6.1) для модуля ускорения свободного падения будем иметь

$$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (3.6.3)$$

На поверхности Земли ($h = 0$) модуль ускорения свободного падения равен

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad (3.6.4)$$

а сила тяжести равна

$$\vec{F}_т = m\vec{g}. \qquad (3.6.5)$$

Модуль ускорения свободного падения, входящего в формулы (3.6.4) и (3.6.5), равен приближённо 9,8 м/с^2.

Ускорение свободного падения

Из формулы (3.6.3) видно, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела. Оно уменьшается при подъёме тела над поверхностью Земли: *ускорение свободного падения обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра Земли.*

Однако если высота h тела над поверхностью Земли не превышает 100 км, то при расчётах, допускающих погрешность ≈ 1,5%, этой высотой можно пренебречь по сравнению с радиусом Земли (R = 6370 км). Ускорение свободного паде-

ния на высотах до 100 км можно считать постоянным и равным 9,8 м/с^2.

И всё же *у поверхности Земли ускорение свободного падения не везде одинаково.* Оно зависит от географической широты: больше на полюсах Земли, чем на экваторе. Дело в том, что земной шар несколько сплюснут у полюсов. Экваториальный радиус Земли больше полярного на 21 км.

Другой, более существенной причиной зависимости ускорения свободного падения от географической широты является вращение Земли. Второй закон Ньютона, с помощью которого получена формула (3.6.4), справедлив в инерциальной системе отсчёта.

Такой системой является, например, гелиоцентрическая система. Систему же отсчёта, связанную с Землёй, строго говоря, нельзя считать инерциальной. Земля вращается вокруг своей оси и движется по замкнутой орбите вокруг Солнца.

Вращение Земли и сплюснутость её у полюсов приводят к тому, что ускорение свободного падения относительно геоцентрической системы отсчёта на разных широтах различно: на полюсах $g_{пол} \approx 9{,}83$ м/с^2, на экваторе $g_{экв} \approx 9{,}78$ м/с^2, на широте 45° $g = 9{,}81$ м/с^2. Впрочем, в наших расчётах мы будем считать ускорение свободного падения приближённо равным 9,8 м/с^2.

Из-за вращения Земли вокруг своей оси ускорение свободного падения во всех местах, кроме экватора и полюсов, не направлено точно к центру Земли.

Кроме того, ускорение свободного падения зависит от плотности пород, залегающих в недрах Земли. В районах, где залегают породы, плотность которых больше средней плотности Земли (например, железная руда), g больше. А там, где имеются залежи нефти, g меньше. Этим пользуются геологи при поиске полезных ископаемых.

Масса Земли

Без «земных» опытов по определению гравитационной постоянной G мы никакими астрономическими способами не смогли бы определить массу Земли и других планет.

Определив опытным путём ускорение свободного падения, можно, пользуясь выражением (3.6.4), вычислить массу Земли:

$$M = \frac{gR^2}{G}. \qquad (3.6.6)$$

Подставив в эту формулу $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 и $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2, получим

$$M \approx 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ кг.}$$

Центр тяжести[1]

Сила тяжести действует на все тела. Но к какой точке тела приложена эта сила, если тело нельзя считать материальной точкой?

Возьмём тело произвольной формы, например кусок фанеры. Проколем в нём несколько отверстий: в точках A, B, D (рис. 3.9, *а*). Подвесим этот кусок фанеры на спице, пропущенной через отверстие в точке A. На кусок фанеры действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила со стороны опоры (спицы) — сила реакции опоры $\vec{N}$. Под действием этих двух сил тело находится в равновесии (покоится). Поэтому, согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_т + \vec{N} = 0, \qquad (3.6.7)$$

так как ускорение тела равно нулю.

Из выражения (3.6.7) следует, что

$$\vec{F}_т = -\vec{N},$$

т. е. сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ направлены противоположно, и линии их действия лежат на одной прямой. Эта прямая вертикальна и проходит через точку A

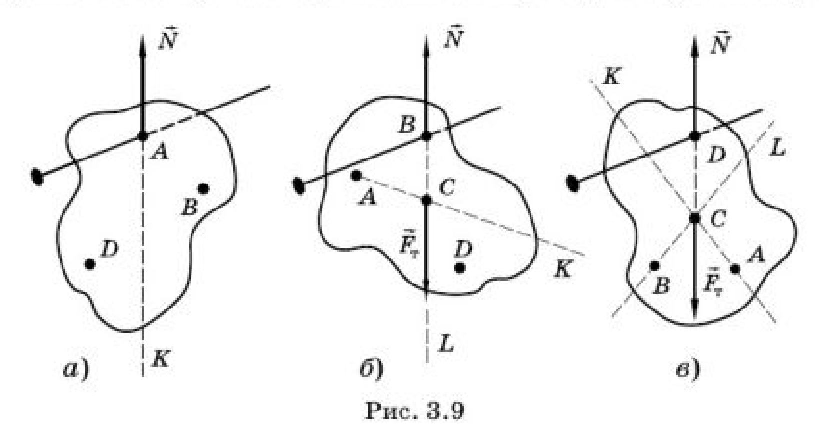


Рис. 3.9

[1] Более подробно о центре тяжести рассказывается в главе 8.

(прямая AK), так как сила реакции спицы $\vec{N}$ приложена к куску фанеры в точке подвеса, т. е. в точке A. Следовательно, точка приложения силы тяжести (начало вектора силы тяжести), действующей на кусок фанеры, лежит на прямой AK.

Теперь подвесим этот же кусок фанеры в точке B (рис. 3.9, *б*). Аналогичными рассуждениями мы придём к выводу, что точка приложения силы тяжести лежит на прямой BL. Но раз точка приложения силы тяжести лежит и на прямой BL, и на прямой AK, то она должна совпасть с точкой C их пересечения. Подвесив кусок фанеры в точке D (рис. 3.9, *в*) и проведя через неё вертикаль, убедимся, что она тоже проходит через точку C. Таким образом, при любом положении тела в пространстве точкой приложения силы тяжести, действующей на тело, является одна и та же точка. Эта точка называется центром тяжести тела.

Центром тяжести тела называется точка приложения силы тяжести, действующей на тело, при любом его положении в пространстве.

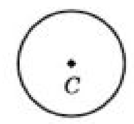
Надо хорошо понимать, что сила тяжести действует на все частицы, из которых состоит тело. Но если положение центра тяжести известно, то мы можем «забыть» о том, что на все части тела действуют силы тяжести, и считать, что есть только одна сила, приложенная в центре тяжести.

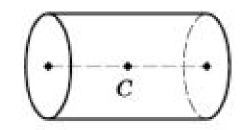
Руководствуясь соображениями симметрии, можно указать положение центра тяжести однородных тел простой формы (рис. 3.10):

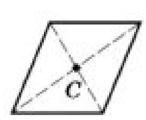
диск и шар — в центре;

пластинка в форме параллелограмма и брус в форме параллелепипеда — в точке пересечения их диагоналей;

цилиндр — на середине его оси.







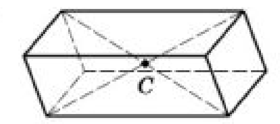


Рис. 3.10

Сила притяжения тел к Земле — сила тяжести — одно из проявлений силы всемирного тяготения. Эта сила приложена в точке, называемой центром тяжести тела.

? 1. От каких параметров зависит ускорение свободного падения? Ответ представьте в виде структурно-логической схемы.

2. Где больше ускорение свободного падения — в Москве или в Санкт-Петербурге?
3. Известно, что Луна притягивается к Земле с силой $F = 2 \cdot 10^{20}$ Н. Вычислите массу Луны.
4. Может ли центр тяжести находиться вне тела?
5. Где находится центр тяжести однородной пластинки треугольной формы?
6. Вырежьте из картона несколько пластинок произвольной формы и опытным путём найдите их центр тяжести.
7. Каким образом определить центр тяжести человека?

§ 3.7. ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ. РАСЧЁТ ПЕРВОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ

Первый в истории искусственный спутник Земли был запущен в нашей стране 4 октября 1957 г. Займёмся космическими расчётами.

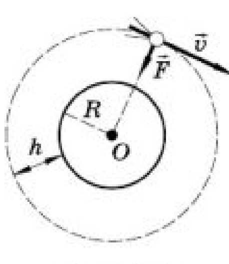


Рис. 3.11

Вычислим, какой скоростью должен обладать искусственный спутник Земли, чтобы он двигался по круговой орбите[1] на высоте h над поверхностью Земли.

На больших высотах воздух сильно разрежен и оказывает незначительное сопротивление движущимся телам. Поэтому можно считать, что на спутник действует только гравитационная сила, направленная к центру Земли (рис. 3.11):

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2},$$

где M — масса Земли, m — масса спутника и R — радиус Земли. Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение:

$$a = \frac{v^2}{R+h}.$$

По второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

[1] Для упрощения расчётов мы рассматриваем движение спутника по круговой орбите. Между тем спутники, вообще говоря, движутся по эллиптическим, а не круговым орбитам.

Следовательно,

$$\frac{v^2}{R+h} = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}. \qquad (3.7.1)$$

Скорость спутника зависит от его высоты над поверхностью Земли: чем больше эта высота, тем с меньшей скоростью он будет двигаться по круговой орбите. Примечательно, что эта скорость не зависит от массы спутника. Значит, спутником Земли может стать любое тело, если ему сообщить на данной высоте направленную перпендикулярно радиусу Земли скорость, модуль которой определяется выражением (3.7.1).

Скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало спутником планеты, называется первой космической скоростью.

Первую космическую скорость v_{I} для Земли у её поверхности можно найти, пользуясь формулой (3.7.1), если принять $h = 0$:

$$v_{\text{I}} = \sqrt{G\frac{M}{R}}. \qquad (3.7.2)$$

Из формулы (3.6.4) следует, что

$$GM = gR^2.$$

С учётом этого формула (3.7.2) примет такой вид:

$$v_{\text{I}} = \sqrt{gR}. \qquad (3.7.3)$$

Так как $g \approx 9{,}8$ м/с², а $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, то первая космическая скорость для Земли у её поверхности оказывается равной

$$v_{\text{I}} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Такую скорость спутникам способны сообщать только мощные космические ракеты.

В настоящее время вокруг Земли обращаются тысячи искусственных спутников. Руками человека за последнее тридцатипятилетие создавались и искусственные спутники Луны, планет Венера и Марс, а также Солнца.

Любое тело может стать искусственным спутником другого тела (планеты), если сообщить ему необходимую скорость.

? Спутник обращается по круговой орбите на небольшой высоте над планетой. Покажите, что для определения средней плотности планеты достаточно знать период обращения спутника.

§ 3.8. ДЕФОРМАЦИЯ И СИЛА УПРУГОСТИ

На лежащую на столе книгу действует сила тяжести (она, как мы знаем, действует всегда!). Тем не менее книга не проваливается сквозь стол. Значит, сила тяжести уравновешивается какой-то другой силой. Что это за сила и как она возникает?

Возникновение силы упругости

Укрепим в лапке штатива один конец пружины (рис. 3.12, *а*). Подвесим к свободному концу пружины груз — пружина растянется (рис. 3.12, *б*). Груз немного покачается и остановится. Почему же он не падает, не получает ускорения? Ведь на него действует сила тяжести. Ответ на этот вопрос, вероятно, вас не затруднит. Причина состоит в том, что при растяжении (деформации) пружины появилась ещё одна сила, которая тоже действует на груз. Она по модулю равна силе тяжести, но направлена в противоположную сторону, т. е. вертикально вверх (см. рис. 3.12, *б*). Эта сила, действующая со стороны растянутой пружины на груз, называется с и л о й у п р у г о с т и.

И на книгу, лежащую на столе, тоже действует сила упругости со стороны стола. Она возникает вследствие деформации стола (не растяжения, конечно, а изгиба его крышки). Правда, этот изгиб на глаз не заметишь. Но точные приборы в состоянии его обнаружить.

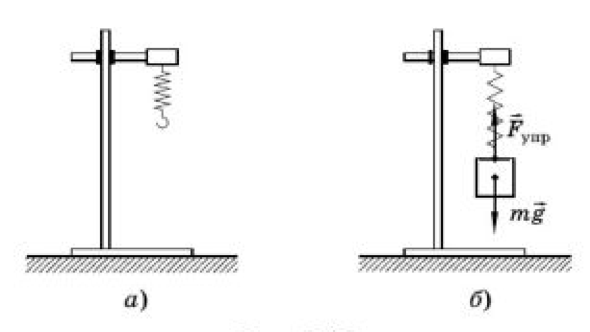


Рис. 3.12

Электромагнитная природа сил упругости

Все тела состоят из молекул и атомов, которые, в свою очередь, состоят из электронов и атомных ядер, т. е. заряженных частиц (электроны заряжены отрицательно, а атомные ядра — положительно). Поэтому между молекулами (атомами) тел одновременно действуют силы электрического притяжения (разноимённые заряды) и отталкивания (одноимённые заряды). Модули этих сил зависят от расстояния между молекулами. На расстоянии, примерно равном диаметру молекулы, силы притяжения между молекулами компенсируются силами отталкивания между ними, и равнодействующая сил притяжения и отталкивания между молекулами равна нулю. При растяжении тела расстояние между молекулами несколько увеличивается, и силы притяжения между ними начинают превосходить по модулю силы отталкивания — между молекулами начинают действовать силы притяжения, препятствующие растяжению тела.

При сжатии тела расстояние между молекулами уменьшается, вследствие чего между ними начинают преобладать силы отталкивания, препятствующие сжатию тела.

Итак, при растяжении или сжатии тела в нём возникают электромагнитные по своей природе силы, препятствующие изменению размеров тела. Это и есть силы упругости.

Деформации тел и силы упругости

Растяжение и сжатие (рис. 3.13, *а*, *б*) представляют собой деформации тела. Вообще под деформацией тела понимают изменение его размеров или формы. Сдвиг (рис. 3.13, *в*), изгиб (рис. 3.14) и кручение (рис. 3.15) — всё это также различные виды деформаций.

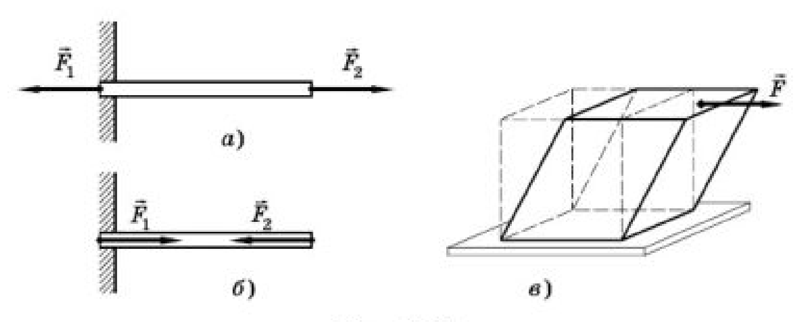


Рис. 3.13

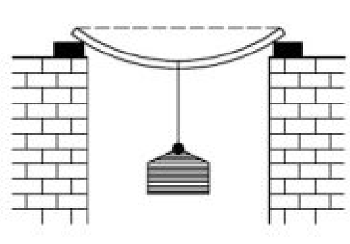




Рис. 3.14

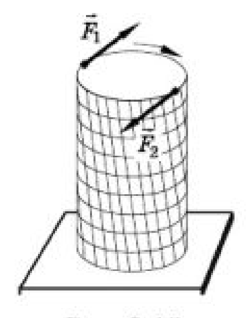


Рис. 3.15



Рис. 3.16

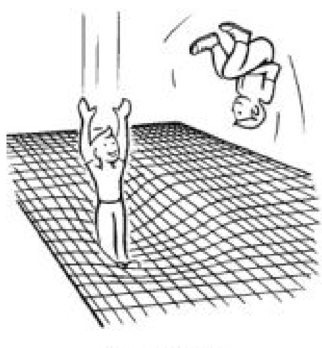


Рис. 3.17

Силы упругости возникают только при деформации тел, а их числовые значения определяются размерами этих деформаций. Сила упругости направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при его деформации.

Так, например, при растяжении пружины (рис. 3.16) возникает сила упругости, действующая на руки. При прогибе сетки батута (рис. 3.17) возникает упругая сила, подбрасывающая акробата. При исчезновении деформации исчезают и силы упругости.

Сила, действующая со стороны деформированного тела на соприкасающиеся с ним тела и направленная в сторону, противоположную перемещению частей тела при его деформации, называется силой упругости.

Упругие и пластичные тела

Хотя силы упругости появляются только при деформациях, не всегда деформации приводят к появлению сил упругости.

Тела, которые полностью восстанавливают свою форму или объём после прекращения действия сил, вызывающих деформации, называются *упругими* телами.



Но наряду с упругими телами (резиновый шнур, стальной шарик и др.) имеются пластичные тела, которые после прекращения действия внешних сил, вызвавших деформацию, не восстанавливают своей формы (мокрая глина, свинцовый шарик).

При деформации этих тел также возникает сила, но это не сила упругости, так как её значение зависит не от деформации, а от скорости возникновения деформации. Чем больше эта скорость, тем больше сила. Мы в дальнейшем преимущественно будем рассматривать только деформацию упругих тел.

Упругие свойства твёрдых тел, жидкостей и газов

Твёрдые тела сохраняют свой объём и форму, так как при любой попытке их деформировать возникают силы упругости.

Жидкости формы не сохраняют. Вы можете перелить воду из графина в стакан, и это не вызовет появления сил упругости. Но попробуйте её сжать хотя бы внутри велосипедного насоса или просто в бутылке. Сила упругости не замедлит сказаться. Точно так же сила упругости появляется при сжатии в насосе воздуха.

Итак, силы упругости возникают всегда при попытке изменить объём или форму твёрдого тела, при изменении объёма жидкости, а также при сжатии газа. В отличие от жидкости, газ всегда сжат. Поэтому газ, содержащийся в каком-нибудь замкнутом сосуде, всегда обладает упругостью.

Отметим ещё одно важное свойство сил упругости. Они направлены перпендикулярно (нормально) поверхности соприкосновения взаимодействующих тел. Именно по этой причине в предыдущей главе мы силу реакции опоры $\vec{N}$ считали перпендикулярной поверхности опоры. Однако при наличии деформации сдвига силы упругости имеют и касательную составляющую.

Как возникает деформация тела?

Деформация тела возникает лишь в том случае, когда одни части тела перемещаются относительно других. Например, когда растягивают резиновый шнур, различные части его перемещаются на различные расстояния. Больше всего смещаются края, а середина остаётся на месте. В результате шнур оказывается деформированным и в нём возникают силы упругости.

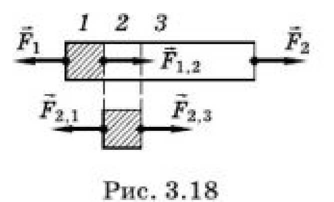


Рис. 3.18

Рассмотрим подробнее, как происходит деформация (растяжение) шнура. На рисунке 3.18 изображён шнур, к концам которого приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю. Мысленно разделим шнур на несколько участков: *1*, *2*, *3*, ... Приложенная к левому концу шнура сила $\vec{F}_1$ вызывает ускорение участка *1*. Он начинает двигаться влево. При этом шнур растягивается, и на участок *1* со стороны соседнего участка *2* начинает действовать сила упругости $\vec{F}_{1,2}$. Сначала $F_{1,2} < F_1$, поэтому участок *1* продолжает с ускорением (уменьшающимся по модулю) двигаться влево, вследствие чего деформация шнура увеличивается. При этом сила $\vec{F}_{1,2}$ растёт по модулю, и наступит момент, когда сила упругости $\vec{F}_{1,2}$ станет по модулю равна силе $\vec{F}_1$.

На участок *2* вначале действует только сила упругости $\vec{F}_{2,1}$ со стороны участка *1*, и участок *2* тоже движется влево с ускорением. Но по мере растяжения шнура возникает сила упругости $\vec{F}_{2,3}$, действующая на участок *2* со стороны соседнего правого участка *3*. И здесь вначале $F_{2,3} < F_{2,1}$. Поэтому участок *2* перемещается влево с уменьшающимся по модулю ускорением. Вскоре установится равновесие: $F_{2,1} = F_{2,3} = F_1$. В конце концов во всех сечениях растянутого шнура, все участки которого неподвижны, будут действовать одинаковые силы упругости, равные по модулю внешним силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенным к концам шнура ($F_1 = F_2$).

Основной причиной рассмотренного процесса является то, что внешняя сила сообщает ускорение не всем элементам тела одновременно, а лишь той его части, на которую эта сила непосредственно действует.

Значительный интерес представляет деформация тела, к которому приложена внешняя сила лишь на одном конце. Такое тело, двигаясь ускоренно, оказывается растянутым неодинаково по длине. В качестве примера рассмотрим мягкую пружину, к правому концу которой приложена сила (рис. 3.19). Больше будут растянуты участки пружины, которые расположены справа, т. е. ближе к месту, где приложена внешняя сила. Ведь здесь

Рис. 3.19

сила упругости должна сообщить ускорение почти всему телу (масса велика), а сила упругости вблизи противоположного конца сообщает то же самое ускорение лишь малой части тела (масса мала).

При торможении быстро движущегося тела с помощью силы, приложенной к одному из участков поверхности тела, возникают деформации и сила упругости. Так, при падении мяча на пол нижние участки мяча при столкновении с жёстким полом резко тормозятся, а верхние в первый момент продолжают по инерции двигаться вниз. В результате мяч сплющивается, и возникают силы упругости, останавливающие весь мяч. Деформация и силы упругости будут бóльшими в нижней части мяча.

При большой разности ускорений соседних частей тела может оказаться, что возникающая вследствие большой деформации сила упругости превосходит определённый допустимый предел. Тогда тело разрушается. Например, при падении стеклянного стакана на твёрдый пол нижняя часть стакана почти мгновенно останавливается, в то время как верхняя часть продолжает двигаться. В результате возникает слишком большая деформация, и стакан разбивается.

Чтобы избежать больших ускорений, способных вызвать разрушения тел, применяют пружины (например, в подъёмных кранах между тросом и крюком или в буферах вагонов), которые способны значительно растягиваться или сжиматься. Благодаря этому тела постепенно набирают нужную скорость или постепенно тормозятся, и разрушения не происходит. Процесс изменения скорости длится дольше, поэтому ускорения, а значит, и силы не достигают больших значений. Так, при падении стакана на мягкий ковёр последний играет роль пружины: прогибаясь, он постепенно замедляет движение нижней части стакана.

В отличие от сил тяготения, действующих между телами всегда, для возникновения сил упругости необходимо определённое условие: тела должны быть деформированы.

? Покажите, что деформация пружины, к правому концу которой приложена постоянная сила (см. рис. 3.19), убывает от максимума (у правого конца пружины) до нуля (у левого конца).

§ 3.9. ЗАКОН ГУКА

Выясним, от чего зависит сила упругости.

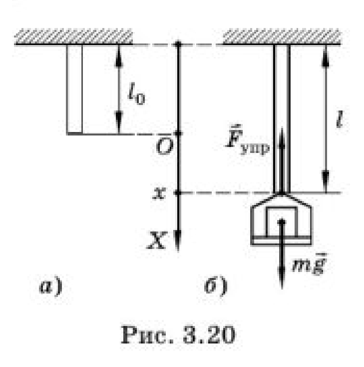


Рис. 3.20

Зависимость силы упругости от деформации установил экспериментально современник Ньютона английский учёный Роберт Гук.

Открытый Гуком закон справедлив только для упругой деформации, т. е. для тех случаев, когда после прекращения действия сил, деформирующих тело, оно возвращается в исходное состояние (восстанавливаются форма и размеры тела).

Рассмотрим, как можно установить этот закон для деформации растяжения резинового шнура.

Возьмём резиновый шнур; расположив его вертикально, закрепим верхний конец. Начальная длина шнура l_0 (рис. 3.20, *а*). Координатную ось X направим вдоль шнура вертикально вниз, а начало координат совместим с нижним концом нерастянутого шнура.

Прикрепим к нижнему концу шнура чашку с находящимся на ней грузом (рис. 3.20, *б*). Шнур растянется, и его длина станет равной l, а координата нижнего его конца примет значение x. Сила упругости $\vec{F}_{упр}$ растянутого шнура уравновешивает силу тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, действующую на чашку с грузами, т. е. $F_{упр} = mg$. Удлинение шнура $\Delta l = l - l_0 = x$.

Меняя число гирек на чашке, мы можем изменять длину, а следовательно, и удлинение (деформацию) шнура Δl. Опыт показывает, что модуль силы упругости при не слишком больших удлинениях прямо пропорционален изменению длины шнура.

Этот вывод справедлив не только для резинового шнура. В таблице 4 представлены результаты лабораторного исследования зависимости силы упругости от удлинения стальной проволоки (её начальная длина 120 см, а диаметр 0,3 мм).

Таблица 4

Δl, мм	0,9	2,0	2,8	3,8	4,7	5,7	6,6	7,5
$F_{упр}$, Н	10	20	30	40	50	60	70	80

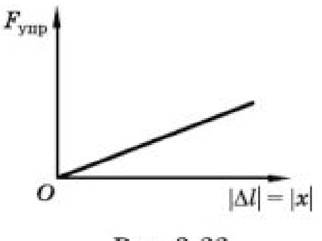


Рис. 3.22

Рис. 3.23

силы сообщают телам. Так, например, можно определять натяжение нитей, верёвок и т. д. Если же тело покоится, то модуль силы упругости, действующей на него, можно определить из условия равенства нулю векторной суммы всех сил, приложенных к телу. Например, силу реакции, с которой горизонтальная опора действует на неподвижное тело, легко определить из условия, что эта сила должна при равновесии тела быть равной по модулю силе тяжести.

Сила упругости, в отличие от силы тяготения, зависит не от расстояния между различными телами, а от изменения расстояния между частями одного и того же тела.

? 1. Придумайте эксперимент, демонстрирующий выполнение закона Гука.
2. Каким образом строятся экспериментальные графики в физике?

§ 3.10. ВЕС ТЕЛА

Вес — очень знакомое слово. Однако очень часто, к сожалению, смешивают понятия «сила тяжести» и «вес тела», а в быту вес отождествляют с массой. Что же это за величина — вес?

С этой величиной вы знакомились в начальном курсе физики. Теперь мы это знакомство расширим и углубим.

В принципе вполне можно обойтись без этого понятия. Вес, как мы сейчас увидим, не что иное, как одно из проявлений сил упругости. Но слово «вес» укоренилось в обиходе, и избавиться от него не так-то просто.

Если тело лежит на опоре, то вследствие притяжения Землёй оно давит на опору. По этой же причине подвешенное тело растягивает подвес.

Сила, с которой тело вследствие его притяжения Землёй действует на опору или растягивает подвес, называется весом тела.

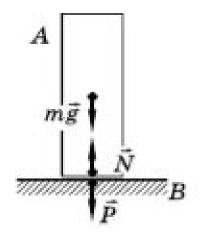


Рис. 3.24

Тело и опора неподвижны или движутся без ускорения

Пусть тело A находится на горизонтальной опоре B (рис. 3.24). На тело A действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Но если опора действует на тело с силой $\vec{N}$, то и тело действует на опору с силой $\vec{P}$, которая в соответствии с третьим законом Ньютона равна по модулю и противоположна по направлению $\vec{N}$: $\vec{P} = -\vec{N}$. Сила $\vec{P}$ и есть вес тела.

Если тело и опора неподвижны или движутся равномерно и прямолинейно, т. е. без ускорения, то, согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

Так как

$$\vec{N} = -\vec{P}, \text{ то } -\vec{P} + m\vec{g} = 0.$$

Следовательно,

$$\vec{P} = m\vec{g}. \qquad (3.10.1)$$

Значит, *если ускорение $a = 0$, то вес тела равен силе тяжести. Однако следует иметь в виду, что сила тяжести приложена к телу, а вес приложен к опоре или подвесу.*

Природа силы тяжести и веса тоже различна. Если сила тяжести является результатом взаимодействия тела и Земли (сила тяготения), то вес появляется в результате совсем другого взаимодействия: взаимодействия тела A и опоры B. Опора B и тело A при этом деформируются, что приводит к появлению сил упругости.

Таким образом, *вес тела* (как и сила реакции опоры) *является частным видом силы упругости.*

Вес обладает особенностями, существенно отличающими его от силы тяжести.

Во-первых, вес определяется всей совокупностью действующих на тело сил, а не только силой тяжести (так, вес тела в жидкости или воздухе меньше, чем в вакууме, из-за появления выталкивающей (архимедовой) силы). Во-вторых, вес

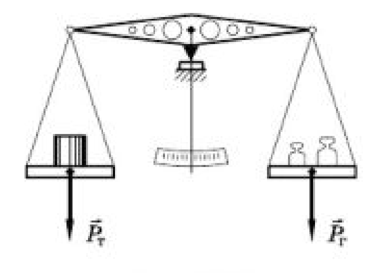


Рис. 3.25

тела, как мы скоро увидим, существенно зависит от ускорения, с которым движется опора (подвес).

Пока же остановимся на простом и практически удобном методе измерения масс тел с помощью взвешивания.

Измерение массы тела на рычажных весах

Положим на одну чашку равноплечих весов тело, массу которого мы хотим измерить, а на другую чашку поставим такой набор гирь (их масса известна), чтобы весы оказались в равновесии (рис. 3.25). Тогда масса $m_т$ тела равна массе $m_г$ гирь.

В самом деле, так как весы находятся в равновесии, то силы, с которыми давят на чашки весов тело и гири, т. е. вес тела и вес гирь, равны между собой[1]. Но вес тела, согласно формуле (3.10.1), равен $P_т = m_т g$, а вес гирь равен $P_г = m_г g$. Значит,

$$m_т g = m_г g,$$

откуда

$$m_т = m_г. \qquad (3.10.2)$$

Описанный способ измерения массы тела называется **в з в е ш и в а н и е м**.

Мы установили, что вес — это разновидность силы упругости.

? Какие способы измерения массы тел вы знаете? Какие способы измерения массы существуют в настоящее время?

§ 3.11. НЕВЕСОМОСТЬ И ПЕРЕГРУЗКИ

Можно ли увеличить или уменьшить вес тела, не изменяя самого тела? Оказывается, да. Рассмотрим, как это происходит.

---

[1] Для равновесия весов требуется равенство моментов сил (см. начальный курс физики). Но для равноплечих весов равенство моментов приводит к равенству сил.

Вес тела при движении опоры или подвеса с ускорением

Пусть тело находится в кабине лифта, движущегося с ускорением $\vec{a}$ (рис. 3.26, *а*, *б*). Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}, \qquad (3.11.1)$$

где $\vec{N}$ — сила реакции опоры (пола лифта), m — масса тела.

По третьему закону Ньютона вес тела $\vec{P} = -\vec{N}$, поэтому, учитывая (3.11.1), получим

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}). \qquad (3.11.2)$$

Направим координатную ось Y системы отсчёта, связанной с Землёй, вертикально вниз. Тогда проекция веса тела на эту ось будет равна

$$P_y = m(g_y - a_y). \qquad (3.11.3)$$

Так как векторы $\vec{P}$ и $\vec{g}$ сонаправлены с осью координат Y, то $P_y = P$ и $g_y = g$. Если ускорение $\vec{a}$ направлено вниз (см. рис. 3.26, *а*), то $a_y = a$, и равенство (3.11.3) принимает следующий вид:

$$P = m(g - a). \qquad (3.11.4)$$

Из формулы (3.11.4) следует, что лишь при $a = 0$ вес тела равен силе тяжести. При $a \neq 0$ вес тела отличается от силы

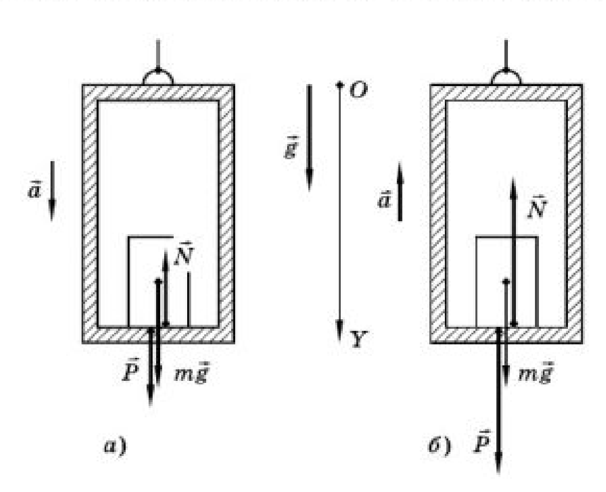


Рис. 3.26

тяжести. При движении лифта с ускорением, направленным вниз (например, в начале спуска лифта или в процессе его остановки при движении вверх) и по модулю меньшим ускорения свободного падения, вес тела меньше силы тяжести. Следовательно, в этом случае вес тела меньше веса того же тела, если оно находится на покоящейся или равномерно движущейся опоре (подвесе). По этой же причине вес тела на экваторе меньше, чем на полюсах Земли, так как вследствие суточного вращения Земли тело на экваторе движется с центростремительным ускорением.

Невесомость

При свободном падении лифта $\vec{a} = \vec{g}$ и $P = m(g - g) = 0$. Это означает, что наступило состояние невесомости. Тела не давят на опоры, и на них не действуют силы реакций опор. В этом случае и тело, и опора не деформированы. Создаётся впечатление исчезновения притяжения к Земле. Хотя на самом деле это не так, Земля притягивает и тело, и опору, сообщая им одинаковое ускорение свободного падения g. Поэтому тело не давит на опору. **Любое тело находится в состоянии невесомости, если на него действуют только силы тяготения.** В таких условиях находятся свободно падающие тела, например тела в космическом корабле. Ведь и космический корабль, и тела в нём тоже находятся в состоянии длительного свободного падения. Впрочем, в состоянии невесомости, хотя и непродолжительно, находится каждый из вас, спрыгивая со стула на пол или подпрыгивая вверх.

Перегрузки

Рассмотрим теперь, что произойдёт, если лифт движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вверх (см. рис. 3.26, *б*). В данном случае вместо равенства (3.11.4) будем иметь равенство



$$P = m(g + a). \qquad (3.11.5)$$

Вес тела в лифте, движущемся с ускорением, направленным вертикально вверх, больше веса покоящегося тела. Увеличение веса тела, вызванное ускоренным движением опоры (или подвеса), называется перегрузкой. Перегрузку можно оценить, найдя отношение веса ускоренно движущегося тела к весу покоящегося тела:

$$k = \frac{m(g + a)}{mg} = 1 + \frac{a}{g}. \qquad (3.11.6)$$

Тренированный человек способен кратковременно выдерживать примерно шестикратную перегрузку. Значит, ускорение космического корабля, согласно формуле (3.11.6), не должно превосходить пятикратного значения ускорения свободного падения.

Вес тела зависит от ускорения опоры, на которой оно стоит, или ускорения подвеса, на котором оно висит. При свободном падении наступает невесомость.

? 1. Как измерить массу тела в условиях невесомости?

2. Можно ли на искусственном спутнике Земли определить массу тела с помощью рычажных весов и гирь?

3. Находились ли вы когда-нибудь в состояниях невесомости и перегрузки? Аргументируйте на конкретных примерах.

§ 3.12. ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СИЛЫ УПРУГОСТИ

Одной из наиболее распространённых причин, вызывающих деформацию тел, является действие силы тяжести. Именно за счёт этой силы возникают деформации, порождающие такие частные виды сил упругости, как вес тела и сила реакции опоры.

Пусть опора неподвижна (или движется равномерно и прямолинейно) относительно Земли. В этом случае, как мы выяснили в § 3.10, вес тела, т. е. сила, с которой тело давит на опору, равен силе тяжести, действующей на это тело.

Обратим прежде всего внимание на то, что вес и сила тяжести не только имеют различное происхождение, но и по-разному действуют на тела. Сила тяжести непосредственно действует на все частицы тела (рис. 3.27, *а*). Все частицы независимо друг от друга притягиваются Землёй. Вес же тела $\vec{P}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ действуют только в местах соприкосновения тел (рис. 3.27, *б*). Это и приводит к тому, что в теле, стоящем на подставке, и в самой подставке всегда возникают деформации и соответственно силы упругости.

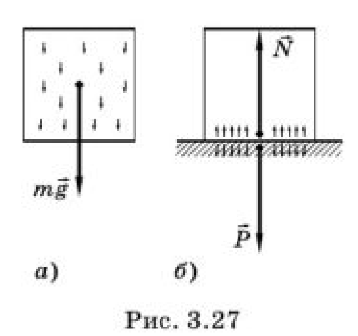


Рис. 3.27

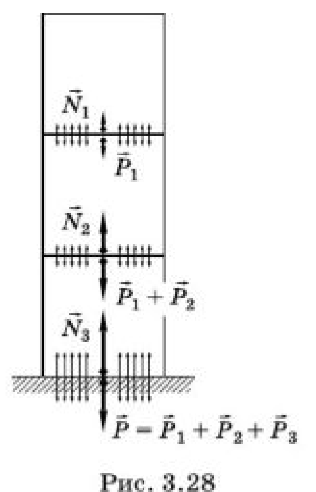


Рис. 3.28

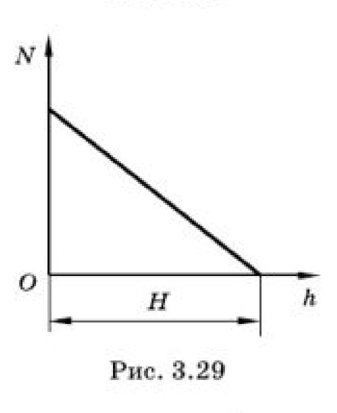


Рис. 3.29

В самом деле, мысленно разобьём тело высотой H на три (для простоты) слоя (рис. 3.28). Очевидно, что сила реакции опоры $\vec{N}_3$, равная по модулю весу всего тела, непосредственно действует только на нижнюю поверхность нижнего слоя. Вес верхнего слоя $\vec{P}_1$ (именно вес, а не сила тяжести) по третьему закону Ньютона равен силе реакции опоры $\vec{N}_1$ со стороны верхней поверхности среднего слоя. Поэтому под действием верхнего слоя средний слой будет сжат и возникшие в нём силы упругости в сумме по всему сечению будут по модулю равны весу верхнего слоя. Нижний слой будет деформирован ещё сильнее, так как сумма сил упругости по модулю равна суммарному весу верхнего и среднего слоёв: $P_1 + P_2$ и т. д.

Легко теперь представить распределение деформаций и сил упругости внутри любого однородного тела с постоянной площадью поперечного сечения. Деформации и силы упругости плавно возрастают от верхних слоёв к нижним. Эта зависимость графически изображена на рисунке 3.29.

Наиболее сильно сжат слой, примыкающий к опоре. Именно за счёт деформации тела у опоры и возникает вес $\vec{P}$. Таким образом, вес является силой упругости. Точно так же сила реакции опоры со стороны подставки возникает вследствие наибольшей деформации опоры. Значит, и сила реакции опоры тоже является силой упругости[1].

Картина возникновения деформаций и сил упругости внутри тела проста. Под влиянием притяжения к Земле отдельные части тела начинают смещаться вниз — падать. Но жёсткая опора препятствует заметным перемещениям осно-

[1] Даже пластичные тела при очень малых деформациях ведут себя как упругие. Именно поэтому и мокрая глина действует на опору с определённой силой.

вания тела. В результате смещения частей тела продолжаются до тех пор, пока вызванные ими деформации не приведут к появлению сил упругости, препятствующих дальнейшему перемещению частей тела. Тело окажется деформированным. Если тело легко деформируется, как, например, мягкая пружина, то деформации хорошо заметны (рис. 3.30).

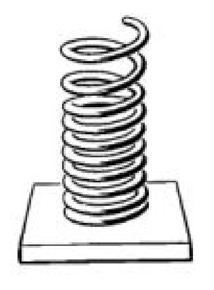


Рис. 3.30

Итак, когда опора покоится или движется без ускорения и, следовательно, вес находящегося на ней тела равен силе тяжести (см. § 3.11), то в теле возникают деформации и обычное распределение сил упругости (см. рис. 3.28).

Иное дело, когда опора движется с ускорением. В § 3.11 мы выяснили, что если ускорение $\vec{a}$ направлено вверх, то вес тела возрастает. Он становится равным

$$P = m(g + a).$$

Соответственно возрастают деформации и силы упругости внутри тела, т. е. появляются перегрузки. Напротив, если вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вниз, то деформации делаются меньше обычных (при $a < g$), так как в этом случае вес

$$P = m(g - a).$$

Наконец, при $a = g$ возникает состояние невесомости ($P = 0$), при котором деформации и силы упругости внутри тела, в частности внутри тела человека, исчезают. Это приводит к ряду физиологических последствий, сказывающихся на ощущениях и поведении человека в состоянии невесомости. Ведь при обычных условиях деформации и упругие напряжения внутри тел существуют, но мы их не замечаем, так как привыкли к ним.

Отметим, что погружённое в жидкость тело может находиться в равновесии, если сила тяжести, действующая на тело, равна выталкивающей (архимедовой) силе. Но это состояние совершенно не эквивалентно состоянию невесомости при свободном падении тела. В данном случае сила тяжести уравновешивается архимедовой силой, действующей на поверхность тела, и существующие в обычных условиях силы упругости внутри тела не исчезают.

Тело, стоящее на опоре или закреплённое на подвесе, подвергается деформации только при совместном действии

силы тяжести и силы упругости со стороны опоры или подвеса.

? Какие деформации испытывает человек при действии на него силы тяжести и силы упругости?

§ 3.13. СИЛА ТРЕНИЯ. ПРИРОДА И ВИДЫ СИЛ ТРЕНИЯ

Третий тип сил, с которыми имеют дело в механике, — это силы трения. Силы трения, как и силы упругости, имеют электромагнитную природу, т. е. в основе сил трения лежат электрические силы взаимодействия молекул. Главная особенность сил трения, отличающая их от гравитационных сил и сил упругости, состоит в том, что они зависят от скорости движения тел относительно друг друга.

Познакомимся сначала с силами трения между поверхностями твёрдых тел. Эти силы возникают при непосредственном соприкосновении тел и всегда направлены вдоль поверхностей соприкосновения, в отличие от сил упругости, направленных перпендикулярно этим поверхностям. Сила трения возникает при движении одного тела по поверхности другого, но она может существовать между соприкасающимися твёрдыми телами, когда эти тела неподвижны относительно друг друга. Всегда силы трения препятствуют относительному перемещению тел.

Природа трения

Причина, по которой книга не соскальзывает со слегка наклонного стола, — шероховатость поверхности стола и обложки книги. Эта шероховатость заметна на ощупь, а под микроскопом видно, что поверхность твёрдого стола более всего напоминает горную страну. По этой же причине лошади нужно приложить большое усилие, чтобы сдвинуть с места тяжёлый груз (рис. 3.31). Бесчисленные выступы цепляются друг за друга, деформируются и не дают книге или грузу скользить. Таким образом, сила трения покоя вызвана теми же силами взаимодействия молекул, что и обычная сила упругости.

При скольжении одного тела по поверхности другого происходит «скалывание» бугорков, разрыв молекулярных



Рис. 3.31

связей, не способных выдержать возросшую нагрузку. Обнаружить «скалывание» бугорков не представляет труда: результатом такого «скалывания» является износ трущихся деталей.

Казалось бы, чем тщательнее отполированы поверхности, тем меньше должна быть сила трения. До известной степени это так. Шлифовка снижает, например, силу трения между двумя стальными брусками, но не беспредельно. При дальнейшем увеличении гладкости поверхностей сила трения начинает расти. Дело здесь в следующем.

По мере сглаживания поверхностей они всё плотнее и плотнее прилегают друг к другу. Однако до тех пор, пока высота неровностей превышает несколько молекулярных радиусов, силы взаимодействия между молекулами соседних поверхностей (кроме самих бугорков) отсутствуют. Ведь это очень короткодействующие силы. Их действие простирается на расстояния в несколько молекулярных радиусов. Лишь при достижении некоего совершенства шлифовки поверхности сблизятся настолько, что силы притяжения (сцепления) молекул охватят значительную часть поверхности соприкосновения брусков. Эти силы начнут препятствовать смещению брусков относительно друг друга, что приводит к увеличению силы трения покоя.

При скольжении гладких брусков рвутся молекулярные связи между молекулами на поверхности брусков, подобно тому как у шероховатых поверхностей разрушаются связи в самих бугорках. *Разрыв молекулярных связей — вот то главное, чем отличаются силы трения от сил упругости, при возникновении которых таких разрывов не происходит.* Именно поэтому силы трения зависят от скорости.

Ниже мы рассмотрим подробнее отдельные виды сил трения.

Трение покоя

Допустим, что вам нужно передвинуть шкаф. Вы действуете на него с силой, направленной горизонтально, но шкаф не сдвигается с места.

Это возможно только в том случае, когда приложенная к шкафу сила компенсируется (уравновешивается) какой-то другой силой. Эта сила, равная по модулю приложенной вами силе и направленная противоположно ей, и есть с и л а т р е н и я п о к о я.

Сила трения покоя — это сила, действующая на данное тело со стороны соприкасающегося с ним другого тела вдоль поверхности соприкосновения тел в случае, когда тела покоятся относительно друг друга.

Вы начинаете толкать шкаф сильнее, а он продолжает оставаться на месте. Значит, одновременно возрастает и сила трения покоя.

Сила трения покоя равна по модулю и направлена противоположно силе, приложенной к телу параллельно поверхности соприкосновения его с другим телом. Если параллельно этой поверхности не действуют никакие силы, то сила трения покоя равна нулю.

Увеличивая силу, действующую на шкаф, вы в конце концов сдвинете его с места. Следовательно, сила трения покоя может изменяться от нуля до некоторого наибольшего значения. *Максимальное значение силы трения, при котором скольжение ещё не наступает, называется максимальной силой трения покоя.* Если действующая на покоящееся тело сила хотя бы немного превышает максимальную силу трения покоя, то тело начинает скользить.

Выясним, от чего зависит максимальная сила трения покоя. Для этого положим на стол тяжёлый деревянный брусок и начнём тянуть его с помощью динамометра (рис. 3.32). Показания динамометра в тот момент, когда брусок начина-

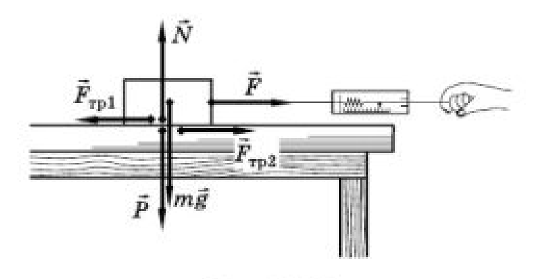


Рис. 3.32

ет трогаться с места, будем записывать. Они соответствуют максимальной силе трения покоя (её модулю). Будем нагружать брусок гирями, увеличивая вес бруска $\vec{P}$, следовательно, и силу реакции опоры $\vec{N}$, в два, три раза и т. д. Заметим, что модуль максимальной силы трения покоя F_{max} тоже увеличивается в два, три раза и т. д.

Проделанный нами опыт и множество других подобных опытов позволяют сделать вывод о том, что максимальное значение модуля силы трения покоя прямо пропорционально модулю силы реакции опоры:

$$F_{max} = \mu N. \qquad (3.13.1)$$

Здесь μ — коэффициент пропорциональности, называемый **коэффициентом трения покоя**.

Коэффициент трения покоя зависит от материала, из которого изготовлены соприкасающиеся тела, качества обработки их поверхностей, но, как показывает опыт, не зависит от площади их соприкосновения. Если положить брусок на меньшую грань, мы получим то же значение для коэффициента трения покоя.

В опыте, изображённом на рисунке 3.32, сила трения покоя приложена не только к бруску, но и к столу. Действительно, если стол действует на брусок с силой трения покоя $\vec{F}_{тр1}$, направленной влево, то брусок действует на стол с силой трения $\vec{F}_{тр2}$, направленной вправо, при этом, согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}.$$

Почему же сила трения покоя может изменяться от нуля до максимального значения, равного μN? Вот как это происходит. При действии на тело некоторой силы $\vec{F}$ оно слегка (незаметно для глаза) смещается. Это смещение продолжается до тех пор, пока микроскопические шероховатости поверхностей не расположатся так, что, зацепляясь друг за друга, они приведут к появлению силы трения, уравновешивающей силу $\vec{F}$. При увеличении силы $\vec{F}$ тело опять чуть-чуть сдвинется так, что мельчайшие неровности поверхностей по-иному будут цепляться друг за друга и сила трения возрастёт. Лишь при $F > F_{max}$ ни при каком расположении поверхностей по отношению друг к другу сила трения не в состоянии уравновесить силу $\vec{F}$, и начинается скольжение.

Трение скольжения

Когда тело скользит по поверхности другого тела, на него тоже действует сила трения — *сила трения скольжения*. В этом можно убедиться на опыте. Прикреплённый к бруску динамометр при равномерном движении бруска по горизонтальной поверхности (рис. 3.33) показывает, что на брусок со стороны пружины динамометра действует постоянная сила упругости $\vec{F}$. Согласно второму закону Ньютона, при равномерном движении бруска (ускорение $a = 0$) равнодействующая всех сил, приложенных к нему, равна нулю. Следовательно, кроме силы упругости $\vec{F}$ (сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ уравновешиваются), во время равномерного движения на брусок действует сила, равная по модулю силе упругости, но направленная противоположно ей. Эта сила и есть *сила трения скольжения*.

Сила трения скольжения, как и максимальная сила трения покоя, зависит от силы реакции опоры $\vec{N}$, от материала трущихся тел и состояния их поверхностей. Существенно, что сила трения скольжения зависит также от относительной скорости движения тел. Во-первых, **сила трения скольжения всегда направлена противоположно относительной скорости соприкасающихся тел.** Это можно пояснить с помощью рисунка 3.34, на котором изображены два трущихся тела. Тело *1* движется относительно тела *2* со ско-

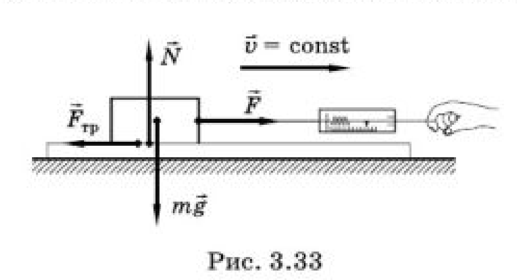


Рис. 3.33

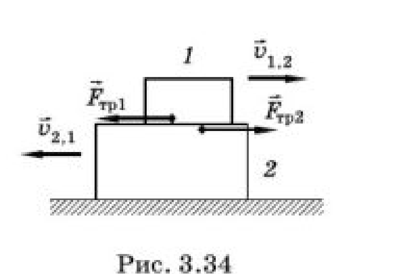


Рис. 3.34

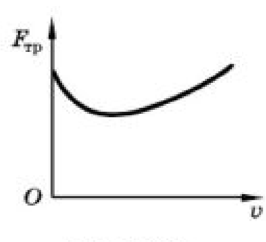


Рис. 3.35

ростью $\vec{v}_{1,2}$, направленной вправо. К телу *1* приложена сила трения $\vec{F}_{тр1}$, направленная влево. Тело *2* движется относительно тела *1* влево со скоростью $\vec{v}_{2,1}$, а приложенная к нему сила трения $\vec{F}_{тр2}$ направлена вправо.

Во-вторых, **модуль силы трения скольжения зависит и от модуля относительной скорости трущихся тел.** Зависимость модуля силы трения скольжения от модуля относительной скорости устанавливается экспериментально. Эта зависимость показана на рисунке 3.35. При малых относительных скоростях движения тел сила трения скольжения мало отличается от максимальной силы трения покоя. Поэтому приближённо можно считать её постоянной и равной силе трения покоя:

$$F_{тр} \approx F_{max} = \mu N. \quad (3.13.2)$$

Коэффициенты трения для некоторых материалов приведены в таблице 5.

Таблица 5

Материалы	μ
Дерево по дереву (дуб)	0,50
Дерево по сухой земле	0,71
Ремень кожаный по чугунному шкиву	0,56
Сталь по льду	0,02
Дерево по льду	0,03—0,04

Заметим, что модуль силы трения $\vec{F}_{тр}$ обычно меньше модуля силы реакции опоры $\vec{N}$. Поэтому коэффициент трения скольжения меньше единицы. По этой причине любое тело легче перемещать волоком, чем поднимать или переносить.

Сила трения зависит от относительной скорости движения тел. В этом её главное отличие от сил тяготения и упругости, зависящих только от координат.

? 1. От чего зависит направление силы трения покоя/силы трения скольжения?

2. Тело массой $m = 5$ кг лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. На тело действует горизонтальная сила $F = 5$ Н. Чему равна сила трения, если тело остаётся в покое?

3. Когда по скрипичной струне равномерно ведут смычком, струна увлекается им и натягивается. Однако в некоторый

момент времени она начинает ускоренно двигаться в направлении, обратном движению смычка. Почему это происходит?

§ 3.14. РОЛЬ СИЛ ТРЕНИЯ

Силы трения действуют между всеми без исключения телами, и с ними приходится считаться.

Сила трения во всех случаях препятствует относительному движению соприкасающихся тел. При некоторых условиях силы трения делают это движение тел просто невозможным. Однако роль сил трения не сводится только к тому, чтобы тормозить движение тел. В ряде практически очень важных случаев движение не могло бы возникнуть без действия сил трения.

Это можно проследить на примере движущегося автомобиля (рис. 3.36). Сила трения $\vec{F}_2$, действующая со стороны земли на ведомые колёса, и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_3$ направлены назад и способны только затормозить движение. Единственной внешней силой, способной увеличить скорость автомобиля, является сила трения покоя $\vec{F}_1$, действующая на ведущие колёса. Не будь этой силы, автомобиль буксовал бы на месте, несмотря на вращение ведущих колёс.

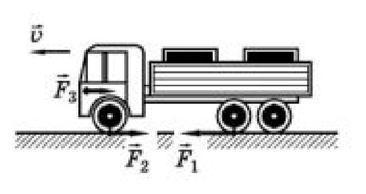


Рис. 3.36

Точно так же сила трения покоя, действующая на ступни ног (рис. 3.37), сообщает нашему телу ускорение, необходимое для начала движения или остановки.



Рис. 3.37

Работа двигателя, приводящего во вращение ведущие колёса, или усилия мышц ног вызывают появление сил трения покоя. Эти силы возникают лишь при условии, что какие-нибудь другие силы стремятся вызвать относительное движение тел (шин или ступней ног относительно земли).

Препятствуя проскальзыванию, сила трения покоя ускоряет машину или наше тело. Но без усилия

§ 3.15. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

При движении твёрдого тела в жидкости или газе или при движении одного слоя жидкости (газа) относительно другого тоже возникает сила, тормозящая движение, — сила жидкого трения или сила сопротивления.

Сила сопротивления направлена параллельно поверхности соприкосновения твёрдого тела с жидкостью (газом) в сторону, противоположную скорости тела относительно среды, и тормозит движение[1].

Сила сопротивления (жидкого трения) обычно значительно меньше силы сухого трения. Именно поэтому для уменьшения сил трения между движущимися деталями машин применяют смазку.

Главная особенность силы сопротивления состоит в том, что она появляется только при относительном движении тела и окружающей среды. Сила трения покоя в жидкостях и газах полностью отсутствует. Это приводит к тому, что усилием рук можно сдвинуть тяжёлое тело, например баржу, в то время как сдвинуть с места, скажем, гусеничный трактор усилием рук просто невозможно.

Убедитесь в том, что плавающий деревянный брусок сразу же придёт в движение, если на него слегка подуть. Попробуйте проделать то же самое с бруском, лежащим на столе.

Модуль силы сопротивления $\vec{F}_c$ зависит от размеров, формы и состояния поверхности тела, свойств (вязкости) среды (жидкости или газа), в которой движется тело, и, наконец, от относительной скорости движения тела и среды.

Для того чтобы уменьшить силу сопротивления среды, телу придают обтекаемую форму. Наиболее выгодна в этом отношении сигарообразная форма (рис. 3.40), близкая к форме падающей капли дождя или рыбы. Влияние формы тела на силу сопротивления наглядно показано на рисунке 3.41. Модуль силы сопротивления цилиндра обозначим через F_0.

---

[1] Впрочем, движущийся поток воды или воздуха может увлекать за собой тело. Например, когда ветер гонит опавшие листья, то сила трения со стороны воздуха направлена по движению листьев. Но и в этом случае она противоположна скорости движения тела (листьев) относительно среды (воздуха). В приведённом примере воздух и листья хотя и движутся в одном направлении, но скорость воздуха больше, листья отстают от ветра.

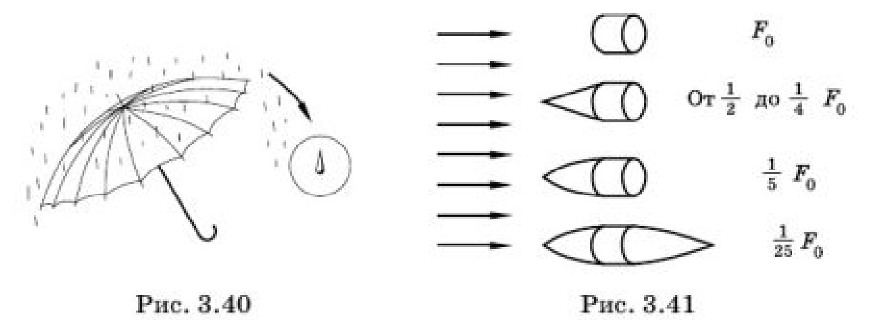


Рис. 3.40 Рис. 3.41

Конусообразная насадка к цилиндру уменьшает силу сопротивления от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}F_0$ в зависимости от размера угла при вершине конуса. Сглаженная насадка доводит силу сопротивления до $\frac{1}{5}F_0$. Наконец, если придать телу сигарообразную форму, то при том же поперечном сечении сила сопротивления уменьшается до $\frac{1}{25}F_0$. По сравнению с телом сигарообразной формы сила сопротивления для шара (имеющего такую же площадь поперечного сечения) больше в несколько раз, а для тонкого диска, плоскость которого перпендикулярна направлению скорости, — в несколько десятков раз. Особенно велика сила сопротивления, возникающая при движении полусферы вогнутой стороной вперёд. По этой причине парашюты имеют часто форму полусферы.

Примерный характер зависимости модуля силы сопротивления от модуля относительной скорости тела приведён на рисунке 3.42. Если тело неподвижно относительно вязкой среды (относительная скорость равна нулю), то сила сопротивления равна нулю. С увеличением относительной скорости сила сопротивления растёт медленно, а потом всё быстрее и быстрее.

При малых скоростях движения в жидкости (газе) силу сопротивления можно считать приближённо прямо пропорциональной скорости движения тела относительно среды:

$$F_с = k_1 \upsilon, \qquad (3.15.1)$$

где k_1 — коэффициент сопротивления, зависящий от формы, размеров, состояния поверхности тела и свойств среды — её вязкости. Коэффициент k_1 в СИ выражается в Н · с/м = кг/с. Его значение определяют опытным путём.

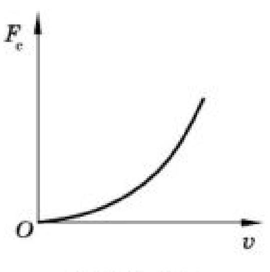


Рис. 3.42

При больших скоростях относительного движения сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости:

$$F_c = k_2 v^2, \qquad (3.15.2)$$

где коэффициент сопротивления k_2 выражается в $\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2 = \text{кг}/\text{м}$.

Какую именно формулу следует применять в данном конкретном случае, устанавливают опытным путём. При падении тел в воздухе сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости практически с самого начала падения.

При ускоренном движении тела в жидкости для учёта воздействия жидкости на это тело надо к массе тела прибавить так называемую присоединённую массу. Присоединённая масса зависит от формы тела и плотности среды. В дальнейшем при решении задач присоединённую массу мы учитывать не будем.

Жидкое трение возникает между поверхностью твёрдого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой оно движется. При медленном движении сила сопротивления пропорциональна скорости, а при быстром — квадрату скорости.

? 1. Поясните термины «сухое трение» и «жидкое трение».
2. Каким образом учитываются проявления жидкого трения при подготовке спортсменов-пловцов к соревнованиям?
3. Почему воздушный шар не конструируют в виде воздушного куба?

§ 3.16. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Благодаря тому что сила сопротивления растёт с увеличением скорости, любое тело в вязкой среде при действии на него какой-либо постоянной силы, например силы тяжести, в конце концов начинает двигаться равномерно.

Модуль этой постоянной скорости зависит от модуля постоянной силы, действующей на тело, и от того, как быстро сила сопротивления растёт с ростом скорости (т. е. от коэффициента сопротивления). Так, при падении шарика в вязкой жидкости (например, глицерине) уже при малых скоро-

стях сила сопротивления достигает заметного значения. Эту силу можно считать прямо пропорциональной скорости. Тогда уравнение движения шарика будет иметь такой вид:

$$ma = F - k_1 v, \qquad (3.16.1)$$

где F — модуль постоянной силы, равной векторной сумме силы тяжести $m\vec{g}$ и архимедовой силы $\vec{F}_A$.

В самом начале движения сила сопротивления очень мала (скорость мала) и ускорение a почти равно g, если архимедова сила невелика. В дальнейшем скорость движения увеличивается и с ней вместе растёт сила сопротивления. Наконец, при

$$F = k_1 v_у \qquad (3.16.2)$$

ускорение тела обращается в нуль, и начиная с этого момента тело будет двигаться с постоянной скоростью:

$$v_у = \frac{F}{k_1}. \qquad (3.16.3)$$

Чем тяжелее тело при прочих равных условиях, тем больше установившаяся скорость.

При падении тел в воздухе сила сопротивления становится заметной при достаточно больших скоростях. При скорости, близкой к установившейся, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Пренебрегая архимедовой силой (она в воздухе мала), запишем уравнение движения тела в этом случае так:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k_2\vec{v}|\vec{v}|. \qquad (3.16.4)$$

Здесь слагаемое $-k_2\vec{v}|\vec{v}|$, соответствующее силе сопротивления воздуха, представляет собой вектор с модулем $k_2 v^2$, направленный противоположно направлению движения, т. е. направлению скорости.

Скорость становится постоянной, когда она достигает значения

$$v_у = \sqrt{\frac{mg}{k_2}}. \qquad (3.16.5)$$

Уравнение (3.16.4) можно решить только в численном виде. Оказывается, что дальность стрельбы в реальных случаях во много раз меньше, чем она должна быть без учёта сопротивления воздуха: вместо 65 км для пушки калибром 305 мм (корабельное орудие) она составляет 20 км, а для пушки калибром 76 мм (полевое орудие) — всего 6—8 км.

В воздухе тяжёлые тела падают с большей установившейся скоростью, чем лёгкие. Соответственно они должны пролетать большее расстояние, прежде чем их скорость станет постоянной. Так, капли дождя имеют установившуюся скорость порядка нескольких метров в секунду, а авиационная бомба — несколько сотен метров в секунду. Такая большая скорость достигается лишь при падении с высоты 5—6 км.

? Как экспериментально измерить установившуюся скорость капель дождя?

§ 3.17. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Опять решаем задачи по динамике, как и во второй главе. Новым здесь является лишь то, что мы будем теперь использовать известные зависимости сил от расстояний и скоростей.

Задача 1

Свинцовый шар радиусом $R = 50$ см имеет внутри сферическую полость радиусом $r = 5$ см, центр которой находится на расстоянии $d = 40$ см от центра шара (рис. 3.43). С какой силой притягивается к шару материальная точка массой $m = 10$ г, находящаяся на расстоянии $l = 80$ см от центра шара, если линия, соединяющая центры шара и полости, составляет угол $\alpha = 60°$ с линией, соединяющей центр шара с материальной точкой? Плотность свинца $\rho = 11{,}3$ г/см^3.

Решение. Мысленно поместим в полость свинцовый шарик таких же размеров, как и полость, тогда свинцовый шар станет сплошным. Его масса $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, и сила тяготения между материальной точкой и сплошным шаром будет определяться формулой

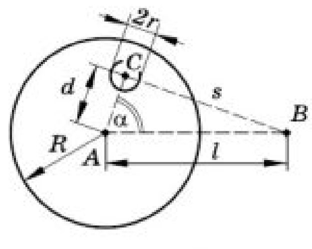


Рис. 3.43

$$F_1 = G\frac{Mm}{l^2}.$$

Сила тяготения материальной точки и маленького шарика, помещённого в полость, равна

$$F_2 = G\frac{m'm}{s^2},$$

где $m' = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ — масса маленького шарика, а s — расстояние между центром полости и материальной точкой.

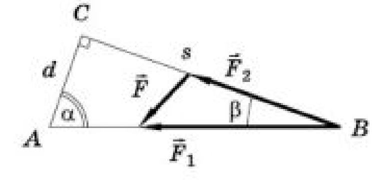


Рис. 3.44

Сила $\vec{F}_1$ притяжения материальной точки к сплошному шару является геометрической суммой сил, с которыми материальная точка притягивается частями шара: шаром с полостью и маленьким шариком, помещённым в полость.

Если искомую силу обозначить через $\vec{F}$, то, согласно рисунку 3.44, имеем

$$\vec{F} + \vec{F}_2 = \vec{F}_1,$$

откуда

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2.$$

Модуль искомой силы $\vec{F}$ можно найти, пользуясь теоремой косинусов:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta}\,.$$

Но для вычисления F необходимо предварительно определить s и $\cos\beta$.

Из треугольника ACB по теореме косинусов имеем

$$s^2 = d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha.$$

Для того же треугольника на основании теоремы синусов[1] можно записать:

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\beta}.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \frac{d\sin\alpha}{s},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{d^2\sin^2\alpha}{s^2}} = \frac{l - d\cos\alpha}{s}.$$

---

[1] $\cos\beta$ можно также найти, применяя теорему косинусов для стороны AB треугольника ABC.

Теперь можно найти модуль искомой силы:

$$F = \frac{4}{3}\pi G\rho m \sqrt{\frac{R^6}{l^4} + \frac{r^6}{(d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha)^2} - \frac{2R^3r^3(l - d\cos\alpha)}{l^2(d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha)^{3/2}}} \approx$$

$$\approx 5{,}7 \cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Заметим, что вычислительную часть задачи можно провести проще, если, пользуясь числовыми данными условия задачи, доказать, что $\triangle ABC$ прямоугольный, тогда $s^2 = l^2 - d^2$, а угол $\beta = 30°$.

Задача 2

Тело, размерами которого можно пренебречь, помещено внутрь тонкой однородной сферы. Докажите, что сила притяжения, действующая со стороны сферы на тело, равна нулю при любом положении тела внутри сферы.

Решение. Искомая сила притяжения является векторной суммой сил притяжения, создаваемых отдельными элементами сферы. Рассмотрим малые элементы σ_1 и σ_2 (рис. 3.45), вырезаемые из сферы конусами с вершиной в точке A (место нахождения маленького тела), которые получаются при вращении образующей BC вокруг оси M_1M_2.

Вычислим площади $S_{\sigma1}$ и $S_{\sigma2}$ этих элементов. Предварительно введём понятие телесного угла.

Внутри сферы радиусом R построим конус, вершина которого находится в центре сферы (рис. 3.46). Этот конус вырежет на сфере некоторую часть поверхности площадью S. *Область пространства, ограниченную поверхностью конуса, называют телесным углом.* Мерой телесного угла Ω является отношение площади S к квадрату радиуса R сферы:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

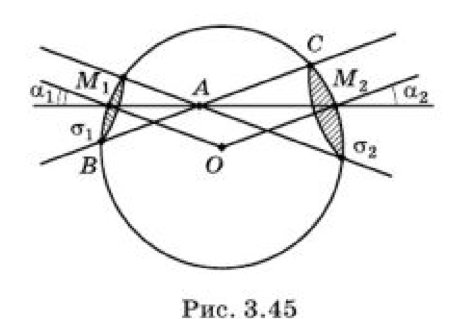


Рис. 3.45

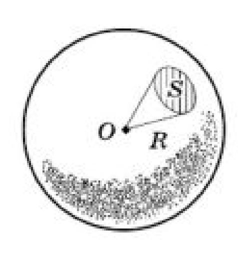


Рис. 3.46

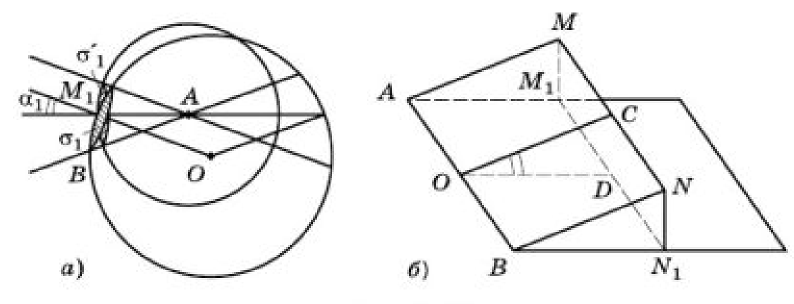


Рис. 3.47

Чтобы вычислить площадь $S_{\sigma 1}$ элемента σ_1, который вырезан на сфере с центром в точке O конусом с вершиной в точке A, построим сферу с центром в точке A радиусом AM_1. Этот конус на новой сфере вырежет элемент σ_1' площадью S_1' (рис. 3.47, *а*). Телесный угол, ограниченный конусом с вершиной в точке A, равен

$$\Omega = \frac{S_1'}{(AM_1)^2}.$$

Отсюда

$$S_1' = (AM_1)^2\Omega.$$

Ввиду малости элементов σ_1 и σ_1' их можно принять за плоские. Радиусы сфер OM_1 и AM_1 являются нормалями к этим элементам. Поэтому двугранный угол[1] между элементами σ_1 и σ_1' равен углу α_1 между прямыми OM_1 и AM_1.

Элемент σ_1' является проекцией элемента[2] σ_1 на сферу с центром в точке A. Следовательно,

$$S_1' = S_{\sigma 1}\cos\alpha_1,$$

---

[1] Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 3.47, *б*). Полуплоскости называются гранями, а ограничивающая их прямая AB — ребром двугранного угла. Мерой двугранного угла является его линейный угол COD ($CO \perp AB$, $DO \perp AB$).

[2] Если каждую точку фигуры, расположенной в одной грани двугранного угла (например, прямоугольника $AMNB$), спроецировать на другую грань, то на этой грани получится фигура AM_1N_1B, называемая проекцией первой фигуры на вторую грань. Легко видеть, что площадь проекции равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус угла между ними.

откуда

$$S_{\sigma 1} = \frac{S'_1}{\cos \alpha_1} = \frac{(AM_1)^2 \Omega}{\cos \alpha_1}.$$

Аналогично площадь элемента σ_2 равна

$$S_{\sigma 2} = \frac{(AM_2)^2 \Omega}{\cos \alpha_2}.$$

Массы элементов σ_1 и σ_2 соответственно равны

$$\frac{(AM_1)^2 \Omega \rho}{\cos \alpha_1} \quad \text{и} \quad \frac{(AM_2)^2 \Omega \rho}{\cos \alpha_2},$$

где ρ — поверхностная плотность данной сферы (отношение массы сферы к её площади); $\alpha_1 = \alpha_2$, так как треугольник M_1OM_2 равнобедренный.

Силы притяжения, создаваемые элементами, соответственно равны

$$F_{\sigma 1} = G\frac{m(AM_1)^2 \Omega \rho}{(AM_1)^2 \cos \alpha_1} = G\frac{m\Omega\rho}{\cos \alpha_1},$$

$$F_{\sigma 2} = G\frac{m(AM_2)^2 \Omega \rho}{(AM_2)^2 \cos \alpha_2} = G\frac{m\Omega\rho}{\cos \alpha_2} = F_{\sigma 1},$$

где m — масса тела, находящегося в точке A. Они равны по модулю и направлены в противоположные стороны, поэтому их равнодействующая равна нулю.

Проводя аналогичные рассуждения для других элементов сферы, убеждаемся, что силы притяжения ими тела попарно компенсируются. Следовательно, сила притяжения, действующая со стороны сферы на помещённое внутри неё тело, равна нулю.

Заметим, что данный результат справедлив и для сферической оболочки конечной толщины, так как её можно разбить на сколь угодно тонкие сферические оболочки, для каждой из которых справедливо доказанное выше утверждение.

Задача 3

Космический корабль движется вдали от планет, так что действием на него внешних гравитационных сил можно пренебречь. С какой силой F космонавт, масса которого m, будет давить на кресло во время работы двигателя, если двигатель

сообщает кораблю такое же по модулю ускорение, какое сообщает телам сила тяжести вблизи поверхности Земли?

Решение. Согласно третьему закону Ньютона, сила $\vec{F}$ равна по модулю и противоположна по направлению силе реакции опоры $\vec{N}$, с которой кресло корабля действует на космонавта:

$$\vec{F} = -\vec{N}.$$

Силу $\vec{N}$ можно найти по второму закону Ньютона, поскольку нам известны масса космонавта и его ускорение. Так как на космонавта действует только сила $\vec{N}$, то

$$m\vec{a} = \vec{N}.$$

Следовательно,

$$\vec{F} = -m\vec{a}.$$

Из этого равенства видно, что космонавт действует на кресло корабля с силой, направленной в сторону, противоположную направлению ускорения (рис. 3.48).

Так как $a = g$, то

$$F = mg.$$

Мы пришли к любопытному результату: если космический корабль движется с ускорением, равным по модулю ускорению, которое сообщает телам сила тяжести вблизи поверхности Земли, то космонавт (или какой-нибудь другой предмет, находящийся в корабле) будет действовать на корабль с силой, равной его весу на Земле.

В ускоренно движущемся корабле тела начинают «весить». Ощущения космонавта будут вполне обычными. Он будет чувствовать себя как на Земле. Предметы, выпущенные из рук космонавта, будут двигаться относительно корабля так же, как если бы космонавт находился на Земле. В таком корабле все механические явления будут происходить точно так же, как на Земле. Если бы иллюминаторы в корабле были закрыты, то люди, находящиеся в нём, не могли бы определить, покоится он на Земле или движется в отсутствие сил тяготения с ускорением, равным по модулю ускорению свободного падения тел на Земле.

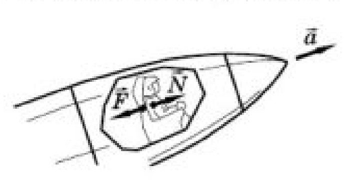


Рис. 3.48

Что же произойдёт, если выключить двигатель? В этом случае корабль будет двигаться относи-

тельно инерциальной системы отсчёта равномерно и прямолинейно ($a = 0$) и, как это следует из формулы (3.11.4), тела перестанут действовать на корабль — перестанут весить. Наступит состояние невесомости[1].

Задача 4

На диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит маленькая шайба массой $m = 100$ г. Шайба соединена с осью горизонтальной пружиной. Если число оборотов диска (частота вращения) не превышает $n_1 = 2$ об/с, пружина находится в нерастянутом состоянии. Если число оборотов диска медленно увеличивается до $n_2 = 5$ об/с, то пружина удлиняется вдвое. Определите коэффициент упругости (жёсткость) пружины k.

Решение. При частоте вращения диска n_1 на шайбу действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная к оси диска (рис. 3.49, *а*). Под действием этих сил шайба получает центростремительное ускорение, модуль которого

$$a_1 = 4\pi^2 n_1^2 l, \qquad (3.17.1)$$

где l — длина нерастянутой пружины.

Уравнение движения шайбы в этом случае имеет вид

$$\vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_1. \qquad (3.17.2)$$

Свяжем систему координат XOY с неподвижной осью диска (см. рис. 3.49, *а*). Спроецировав векторы, входящие в уравнение (3.17.2), на оси X и Y, получим

$$F_{тр} = ma_1,$$

$$N = mg.$$

Так как $F_{тр} = \mu N$, то

$$\mu mg = m \cdot 4\pi^2 n_1^2 l. \qquad (3.17.3)$$

[1] Гравитационным взаимодействием между кораблём и телами, находящимися на корабле, а также между самими телами ввиду их малости можно пренебречь.

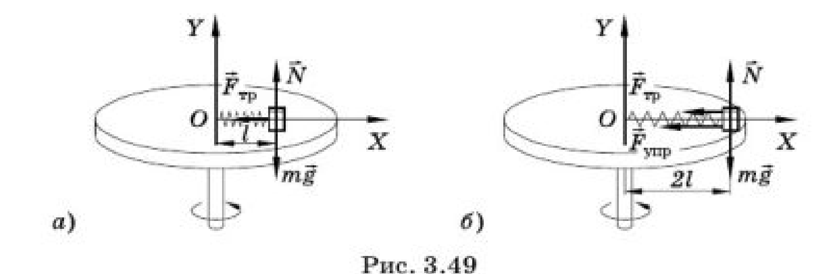


Рис. 3.49

При частоте вращения n_2 длина пружины становится равной $2l$, и на шайбу будут уже действовать четыре силы (рис. 3.49, *б*): $\vec{F}_{упр}$, $\vec{F}_{тр}$, $m\vec{g}$ и $\vec{N}$.

Уравнение движения шайбы теперь имеет такой вид:

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_2,$$

а в проекциях на ось X:

$$F_{упр} + F_{тр} = ma_2, \qquad (3.17.4)$$

где $F_{упр} = kl$, $F_{тр} = \mu mg$ и $a_2 = 4\pi^2 n_2^2 \cdot 2l$.

Следовательно,

$$kl + \mu mg = 8\pi^2 n_2^2 lm. \qquad (3.17.5)$$

Из выражений (3.17.3) и (3.17.5) получим

$$k = 4\pi^2 m(2n_2^2 - n_1^2) = 1{,}8 \cdot 10^2 \text{ Н/м}.$$

Задача 5

Брусок массой M находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит маленький кубик массой m (рис. 3.50, *а*). Коэффициент трения между кубиком и бруском равен μ. К кубику приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. При каком минимальном значении F_{min} силы $\vec{F}$ начнётся скольжение кубика по бруску? Через какое время кубик соскользнёт с бруска? Длина бруска l.

Решение. Двигаясь в горизонтальном направлении, кубик увлекает за собой брусок, вследствие того что между ними есть трение. Максимальная сила, с которой кубик может действовать на брусок в направлении движения, равна мак-

симальной силе трения покоя. Эта сила сообщает бруску ускорение $\vec{a}_2$.

На кубик действуют (рис. 3.50, *б*) сила тяжести $m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Под действием этих сил кубик движется с ускорением $\vec{a}_1$. При $a_1 > a_2$ кубик начнёт обгонять брусок, скользя по его поверхности, пока не упадёт с него.

Уравнение движения кубика в проекциях на горизонтальную ось имеет вид

$$F - F_{тр} = ma_1. \qquad (3.17.6)$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N_1$ и $N_1 = mg$, будем иметь

$$F - \mu mg = ma_1. \qquad (3.17.7)$$

К бруску приложены сила тяжести $M\vec{g}$ (рис. 3.50, *в*), сила реакции опоры $\vec{N}_2$, сила нормального давления $-\vec{N}_1$ и сила трения $-\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны кубика в направлении движения и сообщающая бруску ускорение $\vec{a}_2$.

Уравнение движения бруска в проекциях на горизонтальную ось имеет вид

$$F_{тр} = Ma_2 \text{ или } \mu mg = Ma_2. \qquad (3.17.8)$$

Кубик скользит относительно бруска с ускорением $a = a_1 - a_2$. Из выражений (3.17.7) и (3.17.8) находим

$$a = \frac{F}{m} - \mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad (3.17.9)$$

Минимальное значение F_{min} силы $\vec{F}$ определяется из условия: $a = 0$. Тогда

$$F_{min} = \mu mg\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

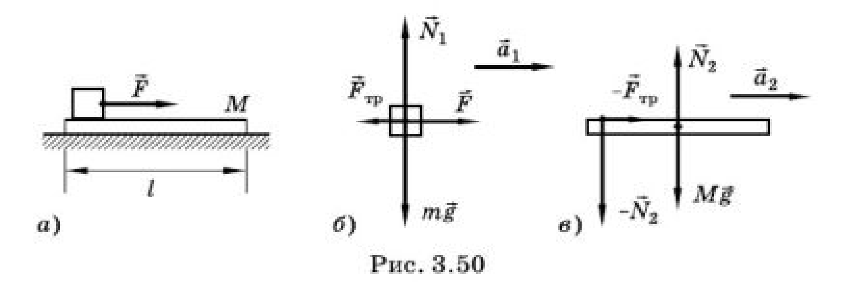


Рис. 3.50

Расстояние, равное длине бруска l, кубик проходит за время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

Следовательно,

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\frac{F}{m} - \mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right)}}.$$

Задача 6

На внутренней поверхности сферы радиусом R, вращающейся вокруг вертикальной оси, проходящей через центр сферы, с постоянной угловой скоростью ω, находится маленькая шайба (рис. 3.51). Считая угол α между осью вращения и радиусом O_1A, проведённым из центра сферы к шайбе, известным, найдите минимальное значение коэффициента трения, при котором шайба не соскользнёт вниз.

Решение. На шайбу действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны сферы $\vec{N}$, направленная по радиусу к центру, и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная по касательной к поверхности сферы и препятствующая скольжению шайбы вниз.

Шайба движется по окружности с центром в точке O_2, расположенной в горизонтальной плоскости. Радиус окружности

$$O_2A = R\sin\alpha.$$

Систему координат XOY свяжем с Землёй. Ось X направим горизонтально так, чтобы в данный момент времени она совпадала с прямой AO_2, проходящей через шайбу, а ось Y — вертикально вверх.

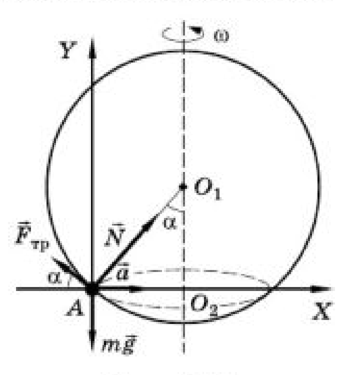


Рис. 3.51

При равномерном вращении сферы шайба имеет лишь нормальное (центростремительное) ускорение $a = \omega^2 r = \omega^2 R\sin\alpha$, направленное к точке O_2 по радиусу окружности AO_2.

По второму закону Ньютона

$$\vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Запишем это уравнение в проекциях на ось Y:

$$N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha - mg = 0,$$

или

$$N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha = mg.$$

Отсюда

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Уравнение движения шайбы в проекциях на ось X запишется так:

$$N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha.$$

Учитывая найденное выражение для модуля силы $\vec{N}$, будем иметь

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\cos\alpha + \mu m\omega^2 R\sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{(g - \omega^2 R\cos\alpha)\sin\alpha}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha}.$$

Если $\omega^2 R\cos\alpha \geqslant g$, то $\mu \leqslant 0$. Это значит, что при достаточно большой угловой скорости вращения сферы $\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}\right)$ шайба не соскользнёт вниз и при отсутствии трения между шайбой и внутренней поверхностью сферы.

Задача 7

Стеклянный шарик, радиус которого $r = 2{,}0$ мм, падает в растворе глицерина. Определите установившуюся скорость и начальное ускорение шарика. Плотности стекла и раствора глицерина равны соответственно $\rho = 2{,}53 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $\rho_0 = 1{,}21 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считать, что при движении шарика в растворе глицерина на него со стороны раствора действует сила сопротивления $F_c = 6\pi\eta rv$ (закон Стокса), где коэффициент $\eta = 5{,}02 \cdot 10^{-2}$ Па · с — вязкость раствора.

Решение. Уравнение движения шарика, падающего в растворе глицерина, в проекциях на вертикальную ось имеет вид

$$mg - F_A - F_c = ma, \qquad (3.17.10)$$

где $m = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$ — масса шарика, $F_A = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 g$ — архимедова сила, действующая на шарик со стороны раствора.

После подстановки в уравнение (3.17.10) значений входящих величин получим

$$\frac{4\pi}{3}r^3\rho g - \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 g - 6\pi\eta r v = \frac{4\pi}{3}r^3\rho a. \qquad (3.17.11)$$

Установившуюся скорость найдём из условия, что ускорение равно нулю:

$$v_у = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9\eta} \approx 0{,}23 \text{ м/с} = 23 \text{ см/с}.$$

Начальное ускорение получим из уравнения движения (3.17.11), полагая скорость равной нулю:

$$a_0 = \frac{(\rho - \rho_0)g}{\rho} \approx 5{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Упражнение 8

1. Среднее расстояние между центрами Земли и Луны равно 60 земным радиусам, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. В какой точке прямой, соединяющей их центры, следует поместить тело, чтобы оно притягивалось к Земле и Луне с одинаковыми силами?
2. На какой глубине h от поверхности Земли ускорение свободного падения g_h = 9,7 м/с^2? Радиус Земли $R_З$ = = 6400 км. Ускорение свободного падения на географических полюсах Земли g_0 = 9,8 м/с^2. Считать Землю однородным шаром.
3. Радиус Луны R_1 приблизительно в 3,7 раза меньше, чем радиус Земли R, а масса Луны m_1 в 81 раз меньше массы Земли m. Каково ускорение свободного падения тел на поверхности Луны?
4. Каково ускорение свободного падения на высоте, равной радиусу Земли?
5. Спутник движется вокруг Земли на расстоянии H от её поверхности. Радиус Земли $R_0 \gg H$. Определите период обращения спутника. Орбиту считать круговой.
6. Два тела одинаковой массы соединены невесомой пружиной, жёсткость которой k = 200 Н/м. Тела находятся на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. К одному из тел приложена горизонтальная сила $\vec{F}$ (F = 20 Н). Определите удлинение Δl пружины.

7. Имеются две пружины, жёсткости которых равны соответственно k_1 и k_2. Какова жёсткость двух пружин, соединённых: а) параллельно; б) последовательно?

8. Посредством пружинного динамометра груз массой $m = 10$ кг тянут по горизонтальной поверхности стола, прикладывая к динамометру горизонтальную силу. Груз при этом движется с ускорением $a = 5$ м/с^2 . Коэффициент трения груза о стол $\mu = 0,1$. Найдите удлинение Δl пружины, если её жёсткость $k = 2000$ Н/м.

9. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $R = 50$ см от оси вращения лежит груз. Коэффициент трения груза о платформу $\mu = 0,05$. При какой частоте вращения груз начнёт скользить?

10. За какое время первоначально покоившееся тело соскользнёт с наклонной плоскости высотой $h = 3,0$ м, наклонённой под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, если при угле наклона плоскости к горизонту $\beta = 10°$ оно движется равномерно?

11. Тело массой $m = 20$ кг тянут с силой $F = 120$ Н по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту, тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту?

12. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. На плоскость положили тело и толкнули вверх. В течение времени $t_1 = 0,7$ с тело прошло расстояние $l = 1,4$ м, после чего начало соскальзывать вниз. Сколько времени длится соскальзывание до начального положения тела? Каков коэффициент трения тела о наклонную плоскость?

13. Цилиндрическая труба радиусом $R = 1$ м катится по горизонтальной поверхности так, что её ось перемещается с ускорением $a = 4,9$ м/с^2. Внутри трубы находится маленький кубик, коэффициент трения скольжения которого о внутреннюю поверхность трубы $\mu = 0,5$. На какой высоте от горизонтальной поверхности, по которой катится труба, находится кубик? Толщиной стенок трубы пренебречь.

14. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $m_1 = 2$ кг, на который положен второй брусок массой $m_2 = 1$ кг. Оба бруска соединены невесомой нитью, перекинутой через неподвижный блок (рис. 3.52). Какую

силу $\vec{F}$ надо приложить к нижнему бруску в горизонтальном направлении, чтобы он начал двигаться с постоянным ускорением $a = \frac{g}{2}$? Коэффициент трения между брусками $\mu = 0,5$.

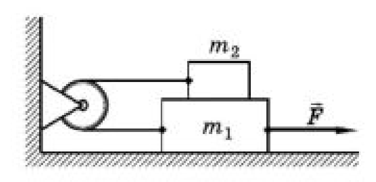


Рис. 3.52

15. Как будет изменяться сила трения между доской и находящимся на ней бруском, если доску приподнимать за один из её концов так, чтобы угол наклона с горизонтом изменялся от 0 до 90°? Начертите график зависимости модуля силы трения от угла наклона доски. Коэффициент трения μ известен.

16. Два шара одинакового размера, но разных масс m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) связаны нитью, длина которой много больше их радиусов. При помещении в жидкость эта система шаров тонет. Какая сила натяжения будет действовать на соединяющую шары нить при их установившемся падении в жидкости?

---

1. В главном труде Ньютона «Математические начала натуральной философии» область знаний, которой посвящена книга, называется натуральной философией, а не физикой. Почему?

2. Напишите эссе «Сила всемирного тяготения: как делаются открытия в физике».

3. Напишите эссе «Может ли гравитация помочь здоровью?».

4. Напишите эссе «Космические путешествия: прошлое, настоящее и будущее».

5. Известно, что на астероидах сила притяжения практически отсутствует. Разработайте проект, как «приземлить» какой-либо объект на астероид.

6. Напишите критическую статью «Вес или масса?».

7. Подготовьте фотоальбом «Невесомость и перегрузки».

8. При каких условиях возникает «трение» между людьми, приводящее к конфликтной ситуации? Есть ли общее в механизмах возникновения трения в физике и в человеческих отношениях?

Глава 4

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

§ 4.1. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

Во второй главе было введено понятие инерциальной системы отсчёта. Там же было показано, что законы Ньютона правильно описывают движение только в инерциальных системах отсчёта. Как проверить, является ли данная система отсчёта инерциальной?

Для этого достаточно рассмотреть в ней хотя бы простейший вид движения и выяснить, происходит ли оно в соответствии со вторым законом движения Ньютона.

Мы уже знаем (см. § 2.3), что систему координат, связанную с Землёй, приближённо можно рассматривать как инерциальную.

Предположим, что мы сидим в вагоне поезда, который набирает скорость, т. е. движется с ускорением $\vec{a}_п$.

Представим себе, что перед нами горизонтальный столик, поверхность которого настолько гладкая, что предметы, например шашки или шахматные фигуры, могут скользить по нему без трения. В этом случае фигуры не остаются неподвижными относительно вагона, а движутся в сторону, противоположную ускорению движения поезда, с ускорением $\vec{a}_{от} = -\vec{a}_п$.

Попробуем описать это движение, используя второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}_а = \vec{F}, \qquad (4.1.1)$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая сил, приложенных к шашке или шахматной фигуре, а $\vec{a}_а$ — ускорение относительно Земли.

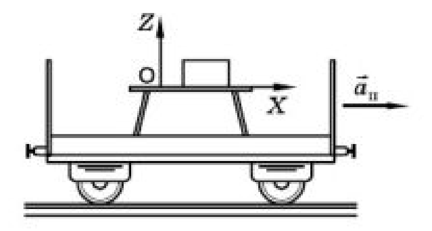


Рис. 4.1

Систему координат свяжем с вагоном.

Направим ось X в направлении движения поезда, а ось Z перпендикулярно поверхности стола (рис. 4.1). Рассмотрим силы, действующие на шашку.

Вдоль оси Z действуют две силы: сила притяжения к Земле и сила реакции со стороны стола. Они равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Вследствие этого $F_z = 0$ и $a_{az} = 0$.

Вдоль оси X силы не действуют. Действительно, по условию сила трения равна нулю, а других сил нет.

В результате из уравнения (4.1.1) следует:

$$F_x = 0, \quad a_{ax} = 0,$$

т. е. тело должно двигаться равномерно и прямолинейно или покоиться.

Этот вывод, однако, противоречит тому, что мы видим, находясь в вагоне: шашка движется с ускорением относительно вагона.

Таким образом, если система координат связана с телом, которое само движется с ускорением (вагоном в рассмотренном случае), то первый и второй законы Ньютона в форме (4.1.1) не могут быть использованы для описания движения тел.

Системы отсчёта, связанные с телами, которые сами движутся с ускорением по отношению к инерциальным системам, называют неинерциальными.

Как же надо изменить уравнение движения (4.1.1), чтобы его можно было использовать для описания движения в неинерциальных системах отсчёта? Решение этой задачи позволит нам, в частности, ответить на вопрос о том, при каких условиях неинерциальную систему отсчёта приближённо можно рассматривать как инерциальную.

В неинерциальных системах отсчёта нельзя пользоваться для описания движения законами Ньютона.

? Почему необходимо изменить законы Ньютона, чтобы они выполнялись в неинерциальных системах отсчёта?

§ 4.2. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Во многих случаях движение относительно неинерциальной системы отсчёта выглядит наиболее просто. И в этих случаях, как правило, задачу удобнее решать в неинерциальных системах. Но для этого нужно ввести силы инерции. Что это такое?

Напомним основные положения механики. Во-первых, ускорение тела, согласно второму закону Ньютона, определяется силами. Во-вторых, согласно третьему закону, силы взаимодействия тел равны по модулю и противоположны по направлению. Сохранить оба эти положения при рассмотрении движения относительно неинерциальных систем невозможно.

Самым существенным является второй закон Ньютона. Это уравнение движения. Его-то и целесообразно сохранить, несколько видоизменив. Но тогда от третьего закона придётся отказаться.

Для того чтобы второй закон Ньютона выполнялся и в неинерциальной системе отсчёта, *наряду с обычными силами, которые действуют на данное тело со стороны других тел, введём так называемые силы инерции.* **Сила инерции — это сила, появление которой не обусловлено действием каких-либо определённых тел. Необходимость их введения вызвана только тем, что системы координат, относительно которых мы рассматриваем движение тел, являются неинерциальными**, т. е. имеют ускорение относительно Солнца и звёзд. Соответственно третий закон Ньютона для сил инерции несправедлив. С одной стороны, силы инерции подобны обычным силам: вызывают ускорения тел. С другой стороны, они отличаются от обычных сил: не вызываются воздействием одного тела на другое.

Найдём теперь значение сил инерции. Ведь для того чтобы введение сил инерции имело практический смысл, мы должны уметь их вычислять. Будем обозначать ускорение тела относительно инерциальной системы отсчёта через $\vec{a}_а$. Часто это ускорение называют абсолютным, а ускорение от-

носительно неинерциальной системы отсчёта называют относительным. Относительное ускорение обозначим $\vec{a}_{от}$. (Эти термины в значительной мере условны; просто надо как-то различать оба ускорения.) Тогда в инерциальной системе отсчёта, как обычно,

$$m\vec{a}_а = \vec{F}. \quad (4.2.1)$$

Здесь $\vec{F}$ — результирующая сил, действующих на тело со стороны других тел. Но в неинерциальной системе

$$m\vec{a}_{от} \neq \vec{F}, \quad (4.2.2)$$

так как $\vec{a}_{от} \neq \vec{a}_а$.

Введём силы инерции $\vec{F}_и$ так: потребуем, чтобы в неинерциальной системе отсчёта также выполнялся второй закон Ньютона, т. е. чтобы имело место равенство

$$m\vec{a}_{от} = \vec{F} + \vec{F}_и. \quad (4.2.3)$$

Здесь $\vec{F}_и$ — та дополнительная сила, которую нужно добавить к обычной силе $\vec{F}$, чтобы второй закон Ньютона выполнялся бы и в неинерциальной системе. Возможно ли это? Да, если сила инерции равна произведению массы тела m на разность относительного и абсолютного ускорений тела:

$$\vec{F}_и = m(\vec{a}_{от} - \vec{a}_а). \quad (4.2.4)$$

Действительно, подставляя это выражение для силы инерции в уравнение (4.2.3), мы получим второй закон Ньютона в форме (4.2.1). Поэтому, введя силы инерции (4.2.4), мы получим правильное описание движения в неинерциальных системах.

Для вычисления силы инерции надо найти разность ускорений тела относительно неинерциальной и инерциальной систем отсчёта. Нахождение $\vec{a}_{от} - \vec{a}_а$ является чисто кинематической задачей, и её всегда можно решить, если известен характер движения неинерциальной системы относительно инерциальной.

Мы ограничимся знакомством с двумя простыми, но весьма важными практически видами движения неинерциальных систем отсчёта.

Сила инерции равна произведению массы тела на разность его относительного и абсолютного ускорений.

§ 4.3. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА, ДВИЖУЩИЕСЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Самый простой случай неинерциальной системы — это система, все точки которой движутся с одинаковыми постоянными ускорениями.

Пусть система отсчёта $X'O'Y'$ движется относительно инерциальной системы XOY с постоянным ускорением $\vec{a}_п$. Это ускорение иногда называют переносным. Если скорость тела относительно одной системы отсчёта равна $\vec{v}_{от}$, а сама система отсчёта движется прямолинейно относительно другой системы отсчёта со скоростью $\vec{v}_п$, то скорость тела относительно этой другой системы (согласно закону сложения скоростей Галилея) равна

$$\vec{v}_а = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п. \qquad (4.3.1)$$

Такая связь, как следует из определения ускорения, будет и между ускорениями:

$$\vec{a}_а = \vec{a}_{от} + \vec{a}_п. \qquad (4.3.2)$$

Следовательно,

$$\vec{a}_{от} - \vec{a}_а = -\vec{a}_п \qquad (4.3.3)$$

и, согласно (4.2.4), сила инерции равна

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_п. \qquad (4.3.4)$$

Итак, если неинерциальная система имеет ускорение $\vec{a}_п$ = const, то в ней наряду с обычными силами действуют силы инерции, определяемые выражением (4.3.4).

Теперь на простом примере познакомимся с отличием описания движения в неинерциальной системе отсчёта от описания того же движения относительно инерциальной системы. Пусть тележка, на которой установлен подвес с маятником (рис. 4.2, *а*), движется с постоянным ускорением $\vec{a}_п$. При движении маятник отклонится от вертикали и после затухания возникших колебаний «замрёт» в отклонённом положении (рис. 4.2, *б*). Нить подвеса будет образовывать угол α с вертикалью. Рассмотрим

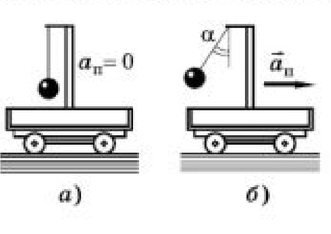


Рис. 4.2

установившееся движение, когда колебаний маятника нет. На левой половине страницы приведём описание движения в инерциальной системе отсчёта (относительно Земли, которую в данном случае можно считать инерциальной системой), а на правой — в неинерциальной системе (относительно тележки).

Инерциальная система отсчёта

1. Маятник движется с ускорением $\vec{a}_а = \vec{a}_п$, так как относительно тележки он покоится, а тележка имеет ускорение $\vec{a}_п$.

2. На маятник действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Они сообщают маятнику ускорение $\vec{a}_п$, направленное горизонтально. Второй закон Ньютона

$$m\vec{a}_п = m\vec{a}_а = m\vec{g} + \vec{T} \quad (1а)$$

справедлив. Как видно из рисунка 4.3,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{ma_п}{mg} = \frac{a_п}{g}.$$

3. Силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ обусловлены действием других тел: $m\vec{g}$ — притяжением к Земле, а $\vec{T}$ — упругостью нити подвеса. Третий закон Ньютона справедлив: маятник притягивает Землю и растягивает нить.

Неинерциальная система отсчёта

1. Относительно тележки маятник неподвижен: $a_{от} = 0$.

2. На маятник действуют те же силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$. Но эти силы не сообщают маятнику ускорения. Второй закон Ньютона непосредственно несправедлив. Чтобы он выполнялся, необходимо добавить ещё силу инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}_п$. Тогда

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_и = 0. \quad (1б)$$

Сумма сил равна нулю, и $a_{от} = 0$. Второй закон теперь выполняется. Причём по-прежнему $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_п}{g}$ (рис. 4.4).

3. Сила $\vec{F}_и$ не вызвана действием какого-либо определённого тела. Третий закон Ньютона для этой силы не имеет места. Силы же $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ по-прежнему обусловлены действием других тел.

Примером неинерциальной системы отсчёта может служить система отсчёта, связанная с лифтом при его замедленном или ускоренном движении. Если ускорение лифта на-

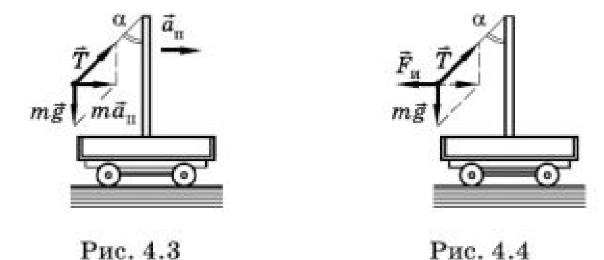


Рис. 4.3 Рис. 4.4

правлено вверх, то наряду с силой тяжести $m\vec{g}$ на все тела в лифте будет действовать сила инерции $m\vec{a}_п$, направленная вниз. Это эквивалентно увеличению веса: вес будет равен $m(g + a_п)$ вместо mg. Если ускорение лифта направлено вниз, то это эквивалентно уменьшению веса, который теперь равен $m(g - a_п)$ вместо mg. Эти изменения в весе непосредственно можно ощущать, находясь в лифте.

При движении системы отсчёта с постоянным ускорением сила инерции равна взятому со знаком «минус» произведению массы на ускорение системы.

§ 4.4. ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА. ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА ИНЕРЦИИ

Рассмотрим ещё один часто встречающийся пример неинерциальной системы отсчёта; пусть система отсчёта вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси.

Ограничимся простым случаем, когда тело покоится относительно вращающейся системы. Тогда

$$v_{от} = 0 \text{ и } a_{от} = 0. \quad (4.4.1)$$

Условия (4.4.1) упрощают решение задачи.

Если тело находится на расстоянии R от оси вращения, то относительно инерциальной системы оно имеет ускорение

$$\vec{a}_а = -\omega^2 \vec{R}. \quad (4.4.2)$$

Знак «минус» появляется из-за того, что радиус-вектор $\vec{R}$ направлен от центра, а ускорение тела — к центру. Переносное ускорение в данном случае равно абсолютному ($\vec{a}_п = \vec{a}_а$), так как относительное ускорение отсутствует.

В инерциальной системе отсчёта кубик, лежащий, например, на диске проигрывателя, имеет ускорение, определяемое выражением (4.4.2). Это ускорение сообщает ему сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная к оси вращения. В неинерциальной системе отсчёта, связанной с вращающимся диском, на кубик действует та же сила трения $\vec{F}_{тр}$, но кубик покоится относительно этой системы. Чтобы объяснить (точнее, описать) этот факт, вводят силу инерции, направленную от оси вращения, которая и уравновешивает силу трения.

Используя определение силы инерции (4.2.4) и учитывая условие $a_{от} = 0$, получим следующее выражение для силы инерции, действующей на тело, которое покоится во вращающейся системе отсчёта:

$$\vec{F}_{и} = m(\vec{a}_{от} - \vec{a}_{а}) = m\omega^2 \vec{R}. \qquad (4.4.3)$$

Эта сила инерции направлена от оси вращения и поэтому называется **центробежной силой инерции**. Она различна в различных точках вращающейся системы.

Теперь на простом примере сравним описание движения в инерциальной и неинерциальной системах отсчёта.

На вращающейся с постоянной угловой скоростью платформе на нити к стойке подвешен шарик массой m (рис. 4.5). Длина нити l, расстояние точки подвеса маятника от оси вращения равно r. При вращении платформы нить отклоняется от вертикали на некоторый угол α. Найдём угловую скорость платформы, если шарик не колеблется, т. е. неподвижен относительно платформы. По-прежнему на левой половине страницы движение будем рассматривать относительно инерциальной системы, а на правой — относительно неинерциальной (вращающейся платформы).

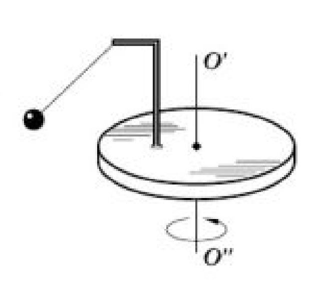


Рис. 4.5

Инерциальная система отсчёта	**Вращающаяся (неинерциальная) система отсчёта**
1. Шарик движется по окружности с постоянным по модулю ускорением $a_а = a_п = \omega^2 R$, где $R = r + l\sin\alpha$ — расстояние от центра шарика до оси вращения.	1. Шарик неподвижен: $a_{от} = 0$.

2. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Они сообщают шарику необходимое для движения по окружности центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона

$$m\vec{a}_{\text{а}} = m\vec{g} + \vec{T} \qquad (1a)$$

справедлив.

Как видно из рисунка 4.6,

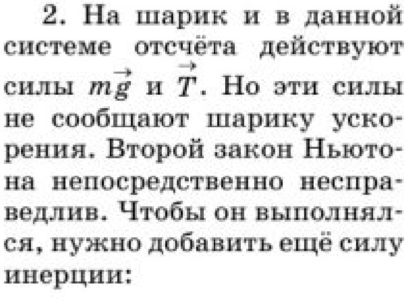
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ma_{\text{а}}}{mg} =$$

$$= \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{\omega^2(r + l\sin\alpha)}{g}.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{r + l\sin\alpha}}.$$

3. Третий закон Ньютона выполняется: шарик притягивает Землю с силой $-m\vec{g}$ и растягивает нить с силой $-\vec{T}$.



2. На шарик и в данной системе отсчёта действуют силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$. Но эти силы не сообщают шарику ускорения. Второй закон Ньютона непосредственно несправедлив. Чтобы он выполнялся, нужно добавить ещё силу инерции:

$$\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}_{\text{п}} = -m\vec{a}_{\text{а}} = m\omega^2\vec{R}.$$

Тогда

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{и}} = 0, \qquad (1б)$$

т. е. сумма всех сил равна нулю (рис. 4.7).

Второй закон Ньютона теперь выполняется.

По-прежнему выполняется равенство

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

3. Третий закон Ньютона выполняется для сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$, но не выполняется для силы $\vec{F}_{\text{и}}$. Сила $\vec{F}_{\text{и}}$ не вызвана действием какого-либо тела.

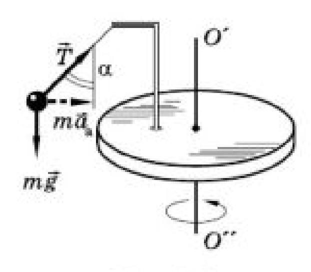


Рис. 4.6

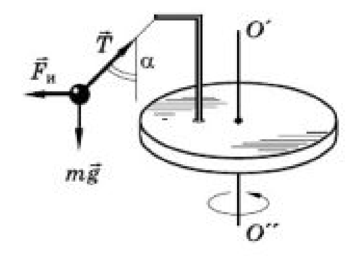


Рис. 4.7

При решении многих задач удобнее описывать движение относительно вращающейся системы отсчёта, введя центробежную силу инерции.

Из-за вращения Земли геоцентрическая система отсчёта не является инерциальной. Если рассматривать механические процессы в этой системе, то нужно вводить для всех точек поверхности Земли, кроме полюсов, центробежную силу инерции, равную

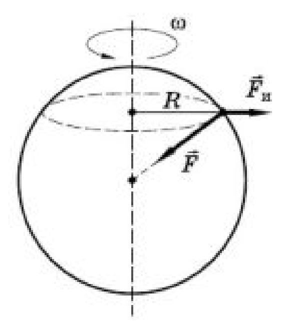


Рис. 4.8

$$\vec{F}_и = m\omega^2 \vec{R}, \qquad (4.4.4)$$

где R — расстояние от поверхности Земли до оси вращения, а ω — угловая скорость вращения Земли вокруг оси (рис. 4.8). Эта сила перпендикулярна оси вращения и составляет с силой тяготения $\vec{F}$ некоторый угол, зависящий от географической широты места. Только на экваторе она перпендикулярна поверхности Земли. Действие силы инерции приводит к тому, что всюду, кроме полюсов, вес тела несколько меньше силы тяготения.

Отношение силы инерции к силе тяготения равно:

$$\frac{F_и}{F} = \frac{\omega^2 R R_З^2}{GM}. \qquad (4.4.5)$$

Максимальное значение это отношение имеет на экваторе, но и там оно невелико:

$$\left(\frac{F_и}{F}\right)_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R_З^3}{GM} \approx 0{,}004, \text{ или } 0{,}4\%.$$

Более сложные силы инерции (силы Кориолиса), возникающие во вращающейся системе отсчёта при движении тела относительно этой системы отсчёта, мы рассматривать не будем.

С помощью центробежных сил инерции проще всего, например, объяснить работу ультрацентрифуги. Этот аппарат предназначен для разделения высокомолекулярных соединений: белков, нуклеиновых кислот и других, растворённых в жидкости.

Ротор центрифуги с закреплёнными в нём пробирками с раствором приводится в очень быстрое вращение (до $6{,}5 \cdot 10^4$ об/мин). При этом на молекулы растворённого вещества, плотность которого больше плотности жидкости, начинают действовать мощные центробежные силы инерции (если рассматривать процесс во вращающейся системе отсчёта). Эти силы отделяют молекулы от остальной жидкости, на

которую действуют меньшие силы. Высокомолекулярные соединения «тонут» в поле центробежных сил.

При расстоянии от оси вращения 10 см ускорение

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 R = (2\pi)^2 \left(\frac{65\,000}{60}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)^2 \cdot 0{,}1\ \text{м} \approx 5 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Это ускорение в 500 000 раз больше ускорения свободного падения. Центрифуги с несколько меньшей скоростью вращения используются для разделения изотопов химических элементов, в частности изотопов урана.

На все тела на поверхности Земли действует центробежная сила инерции. Эта сила пропорциональна произведению квадрата угловой скорости на радиус окружности, вдоль которой движется тело.

? 1. Какова природа сил инерции? Ответ аргументируйте.
2. Выполняется ли третий закон Ньютона для центростремительной и центробежной сил?

§ 4.5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач с использованием неинерциальных систем отсчёта применяются те же правила, что и при решении задач на динамику в инерциальных системах отсчёта. Появляются лишь дополнительные силы — силы инерции. Если инерциальная система движется с постоянным ускорением $\vec{a}_{\text{п}}$, то сила инерции $\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}_{\text{п}}$. Во вращающейся системе координат центробежная сила инерции $\vec{F}_{\text{ц}} = m\omega^2 \vec{R}$, если тело (материальная точка) находится на расстоянии R от оси вращения и покоится относительно данной неинерциальной системы отсчёта.

Нужно иметь в виду, что любую задачу можно решить, используя инерциальную систему отсчёта. Использование неинерциальных систем отсчёта диктуется соображениями простоты и удобства решения задач в этих системах.

Задача 1

К потолку лифта, поднимающегося с ускорением $a = 1{,}2$ м/с^2, направленным вверх, прикреплён динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить,

к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Определите показания динамометра. Массой нити и блока пренебречь.

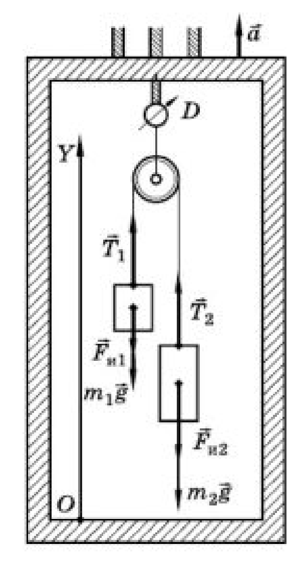


Рис. 4.9

Решение. Будем рассматривать движение относительно неинерциальной системы, связанной с лифтом. Вертикальную ось Y направим вверх (рис. 4.9). Действующие на грузы силы изображены на этом рисунке. Кроме сил тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ и сил натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, действуют силы инерции $\vec{F}_{и1} = -m_1\vec{a}$ и $\vec{F}_{и2} = -m_2\vec{a}$.

Так как нить и блок невесомые, то $T_1 = T_2 = T$ и на блок со стороны нити действует сила, равная $2T$, направленная вниз. Сила, действующая на блок со стороны динамометра, уравновешивает эту силу, поэтому показания динамометра равны $2T$.

Запишем уравнения движения грузов:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{и1}, \\ m_2\vec{a}_2 &= m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{и2}. \end{aligned} \qquad (4.5.1)$$

Здесь $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — ускорения грузов относительно лифта. Очевидно, что ускорение $\vec{a}_1$ направлено вверх, а ускорение $\vec{a}_2$ направлено вниз, так как $m_2 > m_1$. Модули ускорений равны: $a_1 = a_2 = a_{от}$.

При положительном направлении оси Y вверх $a_{1y} = a_{от}$, $a_{2y} = -a_{от}$, $g_y = -g$, $T_{1y} = T$ и $T_{2y} = T$. Уравнения (4.5.1) для модулей перепишутся так:

$$\begin{aligned} m_1a_{от} &= -m_1g + T - m_1a, \\ -m_2a_{от} &= -m_2g + T - m_2a. \end{aligned} \qquad (4.5.2)$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a).$$

Показания динамометра

$$2T = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a) = 5{,}3 \text{ Н}.$$

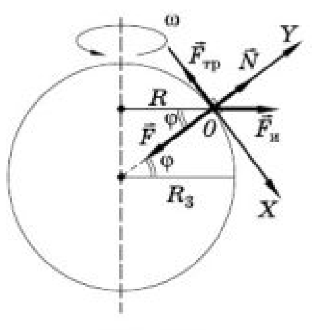


Рис. 4.10

Задача 2

На поверхности Земли на широте φ лежит груз массой m (рис. 4.10). Масса Земли M, радиус Земли $R_З$. Найдите силу нормального давления груза на Землю (вес груза) и силу трения покоя. Угловая скорость вращения Земли ω.

Решение. В системе отсчёта, связанной с Землёй, на груз действуют три обычные силы: сила тяготения $\vec{F}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ (она равна по модулю и противоположна по направлению силе нормального давления на Землю, т. е. весу тела) и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (эта сила препятствует скольжению груза от полюса к экватору). Кроме того, действует центробежная сила инерции $\vec{F}_и = m\omega^2\vec{R}$, где $R = R_З\cos\varphi$ — радиус окружности, по которой движется груз вместе с Землёй относительно инерциальной системы отсчёта. Все силы изображены на рисунке 4.10.

Начало системы координат, связанной с Землёй, совместим с центром тела; ось Y направим перпендикулярно поверхности Земли, а ось X — по касательной к поверхности.

Тело находится относительно Земли в покое. Поэтому сумма всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_и = 0.$$

В проекциях на оси Y и X это уравнение запишется так:

$$-F + N + m\omega^2R_З\cos^2\varphi = 0,$$
$$-F_{тр} + m\omega^2R_З\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Отсюда

$$N = F - m\omega^2R_З\cos^2\varphi,$$

$$F_{тр} = m\omega^2R_З\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}m\omega^2R_З\sin 2\varphi.$$

Вес тела

$$P = N = F - m\omega^2R_З\cos^2\varphi.$$

Из этих формул видно, что на полюсах Земли ($\varphi = 90°$) $P = F = G\frac{Mm}{R_З^2}$. Это означает, что вес тела и сила тяготения равны по модулю. Сила трения на полюсе равна нулю. На эк-

ваторе ($\varphi = 0°$) $P = G\dfrac{Mm}{R_З^2} - m\omega^2 R_З$, т. е. вес меньше силы тяготения. Сила трения и на экваторе равна нулю. Максимальное значение сила трения имеет при $\varphi = \pm 45°$, когда $\sin 2\varphi = 1$.

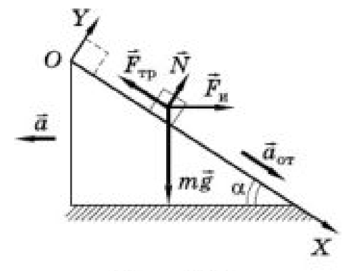


Рис. 4.11

Задача 3

Тело находится в покое на вершине наклонной плоскости (рис. 4.11). За какое время тело соскользнёт с плоскости, если плоскость в момент времени $t_0 = 0$ начнёт двигаться влево в горизонтальном направлении с ускорением $a = 1$ м/с^2? Длина плоскости $l = 1$ м, угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,6$.

Решение. Координатные оси системы отсчёта, связанной с плоскостью, направим вдоль плоскости и перпендикулярно ей (см. рис. 4.11). В этой системе отсчёта, кроме силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$, действует сила инерции $\vec{F}_и$.

Искомое время определится по формуле пути при равноускоренном движении без начальной скорости:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{от}}}.$$

Здесь $a_{от}$ — модуль ускорения тела относительно плоскости. Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчёта, связанной с плоскостью, запишется так:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_и = m\vec{a}_{от},$$

где

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}.$$

Уравнения для модулей проекций на оси координат X и Y имеют вид

$$N - mg\cos\alpha + ma\sin\alpha = 0,$$
$$mg\sin\alpha - F_{тр} + ma\cos\alpha = ma_{от}.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, из этой системы уравнений найдём ускорение $a_{от}$:

$$a_{от} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Следовательно,

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{\text{от}}}} = \sqrt{2l(g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha))^{-1}} \approx$$

$$\approx 0{,}8 \text{ с.}$$

Упражнение 9

1. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг (рис. 4.12). Ось блока движется с ускорением $a = 4$ м/с^2, направленным вниз. Найдите ускорения грузов относительно Земли.

2. В вагоне поезда, идущего со скоростью $v = 72$ км/ч по закруглению радиусом $R = 400$ м, производится взвешивание тела на пружинных весах. Определите показания весов, если масса тела $m = 100$ кг.

3. На экваторе планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Определите период T вращения планеты вокруг своей оси, рассматривая её как однородный шар со средней плотностью вещества $\rho = 3000$ кг/м^3.

4. Металлическая цепочка длиной $l = 0{,}5$ м, концы которой соединены, насажена на деревянный диск (рис. 4.13). Диск вращается с частотой $n = 60$ об/с. Масса цепочки $m = 40$ г. Определите силу натяжения T цепочки.

5. Наклонная плоскость (рис. 4.14) с углом наклона α движется влево с ускорением $\vec{a}$. При каком значении ускорения тело, лежащее на наклонной плоскости, начнёт подниматься вдоль плоскости? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ.

6. Гладкая наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол α (рис. 4.15), движется вправо с ускорением $\vec{a}$. На

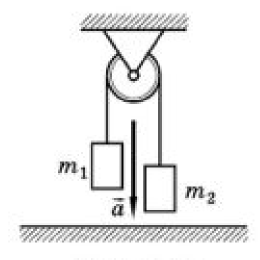
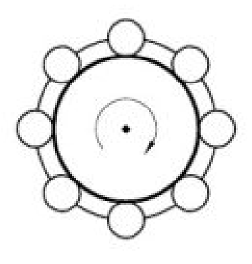


Рис. 4.12


Рис. 4.13

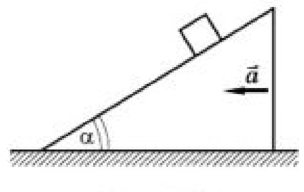



Рис. 4.14

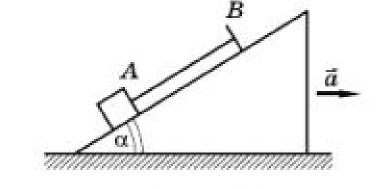


Рис. 4.15

плоскости лежит брусок массой m, удерживаемый нитью AB. Найдите силу натяжения T нити и силу давления P бруска на плоскость.

---

1. Сделайте видеорепортаж «Неинерциальные системы отсчёта в моей жизни».
2. Соберите видеоколлекцию различных неинерциальных систем отсчёта.
3. Подготовьте доклад «Силы инерции: техника и природа».

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Глава 5

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 5.1. ЗНАЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Какую бы систему взаимодействующих тел мы ни рассматривали, будь то Солнечная система или сталкивающиеся бильярдные шары, у тел системы с течением времени непрерывно изменяются координаты и скорости. В этом, разумеется, нет ничего неожиданного. Замечательным является то, что в системе тел, на которую не действуют внешние силы (такую систему называют замкнутой), имеется ряд величин, зависящих от координат и скоростей (но не ускорений) всех тел системы, которые при движении тел не изменяются со временем. К таким сохраняющимся величинам относится импульс (или количество движения), энергия и момент импульса (момент количества движения). Все они, как говорят, подчиняются соответствующим законам сохранения.

Мы рассмотрим подробно два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. С законом сохранения момента импульса познакомимся на простых частных примерах.

Роль законов сохранения

Значение законов сохранения в механике и в физике вообще огромно. Эти законы позволяют сравнительно простым путём, без рассмотрения действующих на тела сил и без про-

слеживания движения тел системы решать ряд практически важных задач, что мы увидим в дальнейшем.

Кроме того, и это самое главное, открытые в механике законы сохранения импульса, энергии и момента импульса играют во всей физике огромную роль, далеко выходящую за рамки самой механики. Даже в тех условиях, когда законы механики Ньютона применять нельзя (например, для движения электронов в атоме), законы сохранения механических величин не теряют своего значения. Они применимы как к телам обычных размеров, так и к космическим телам и элементарным частицам.

Именно всеобщность законов сохранения, их применимость ко всем явлениям природы, а не только к механическим, делают эти законы очень важными.

Законы сохранения незаменимы, когда исследователи начинают проникать во вновь открытую сферу неизвестного. Так было при зарождении физики элементарных частиц. Сущность явлений лежала пока во тьме, были известны только отдельные факты. В этих условиях законы сохранения служили единственной надёжной путеводной нитью для исследователей. Не зная ещё сущности явлений в новой области, учёные с полным правом могли утверждать, что и здесь законы сохранения известных нам величин имеют место. Эта вера в надёжность основных законов сохранения никогда ещё не подводила исследователей и часто дарила им замечательные открытия. Так, открытие новой элементарной частицы — нейтрино обязано закону сохранения энергии.

Связь законов сохранения со свойствами пространства и времени

Особенно отчётливо значение законов сохранения механических величин выяснилось после того, как в XX в. была установлена связь этих законов со свойствами пространства и времени.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, с тем, что все точки пространства совершенно равноправны. Перенос (сдвиг) в пространстве какой-либо механической системы никак не влияет на процессы внутри её. Доказательство того, что из однородности пространства следует закон сохранения импульса, слишком сложно, и мы на нём не можем остановиться.

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, с тем, что все моменты времени равноправны и мы мо-

жем любой момент взять за начало отсчёта времени. Доказательство связи закона сохранения энергии с однородностью времени также сложно. Ограничимся одним примером. Если бы сила притяжения тел к Земле изменялась со временем (т. е. не все моменты времени были бы равноценны) периодически, то энергия не сохранялась бы. Мы могли бы поднимать тела вверх в момент ослабления притяжения к Земле, совершая некоторую работу, и опускать их вниз в моменты увеличения силы притяжения. Выигрыш в работе был бы налицо.

Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства, с тем, что его свойства одинаковы по всем направлениям.

? Каково значение законов сохранения? Ответ представьте в виде структурно-логической схемы.

§ 5.2. ИМПУЛЬС МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ДРУГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА

Введём новую физическую величину — импульс материальной точки. Дадим другую формулировку второго закона Ньютона.

Импульс материальной точки

Второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ можно записать в иной форме, которая приведена самим Ньютоном в его главном труде «Математические начала натуральной философии».

Если на тело (материальную точку) действует постоянная сила, то постоянным является и ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — начальное и конечное значения скорости тела.

Подставив это значение ускорения во второй закон Ньютона, получим

$$\frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} = \vec{F},$$

или

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t. \qquad (5.2.1)$$

В этом уравнении появляется новая физическая величина — импульс материальной точки.

Импульсом материальной точки называют величину, равную произведению массы точки на её скорость.

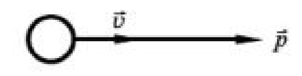


Рис. 5.1

Обозначим импульс (его также называют иногда количеством движения) буквой $\vec{p}$. Тогда

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.} \qquad (5.2.2)$$

Из формулы (5.2.2) видно, что импульс — векторная величина. Так как $m > 0$, то импульс имеет то же направление, что и скорость (рис. 5.1).

Единица импульса не имеет особого названия. Её наименование получается из определения этой величины:

$$\text{единица импульса в СИ} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Другая форма записи второго закона Ньютона

Обозначим через $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ импульс материальной точки в начальный момент интервала Δt, а через $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ — импульс в конечный момент этого интервала. Тогда $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$ есть изменение импульса за время Δt. Теперь уравнение (5.2.1) можно записать так:

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.} \qquad (5.2.3)$$

Так как $\Delta t > 0$, то направления векторов $\Delta\vec{p}$ и $\vec{F}$ совпадают. Согласно формуле (5.2.3), **изменение импульса материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет такое же направление, как и сила.**

Именно так был впервые сформулирован второй закон Ньютона.

Произведение силы на время её действия называют иногда *импульсом силы*. (Не надо путать импульс $m\vec{v}$ материальной точки и импульс силы $\vec{F}\Delta t$. Это совершенно разные понятия.)

Уравнение (5.2.3) показывает, что одинаковые изменения импульса материальной точки могут быть получены в результате действия большой силы в течение малого интервала времени или малой силы за большой интервал времени.

Когда вы прыгаете с какой-то высоты, то остановка вашего тела происходит за счёт действия силы со стороны земли или пола. Чем меньше продолжительность столкновения, тем больше тормозящая сила. Для уменьшения этой силы надо, чтобы торможение происходило постепенно. Вот почему при прыжках в высоту спортсмены приземляются на мягкие маты. Прогибаясь, они постепенно тормозят спортсмена.

Формула (5.2.3) может быть обобщена и на тот случай, когда сила меняется во времени. Для этого весь промежуток времени Δt действия силы надо разделить на столь малые интервалы Δt_i, чтобы на каждом из них значение силы без большой ошибки можно было считать постоянным. Для каждого малого интервала времени справедлива формула (5.2.3). Суммируя изменения импульсов за малые интервалы времени, получим[1]

$$\Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta t_i. \tag{5.2.4}$$

Импульс системы материальных точек

Импульс системы материальных точек равен векторной сумме импульсов всех точек.

Для нахождения импульса тела поступают так: мысленно разбивают тело на отдельные элементы (материальные точки), находят импульсы полученных элементов, а потом их суммируют как векторы. Импульс тела равен сумме импульсов его отдельных элементов.

Мы познакомились с новой физической величиной — импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$. Это позволило записать второй закон Ньютона в форме $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$.

? 1. Две материальные точки равной массы движутся навстречу друг другу с равными по модулю скоростями. Чему равен импульс системы точек?

2. Чему равен импульс однородного диска, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 5.2)?

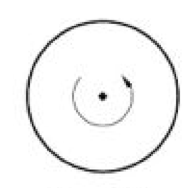


Рис. 5.2

---

[1] Символ Σ (греческая буква «сигма») означает «сумма». Индексы $i = 1$ (внизу) и N (наверху) означают, что суммируется N слагаемых.

§ 5.3. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ТЕЛ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

При рассмотрении любой механической задачи мы интересуемся движением определённого числа тел. Совокупность тел, движение которой мы изучаем, называется механической системой или просто системой. Как изменяется импульс системы тел?

Изменение импульса системы тел

Рассмотрим систему, состоящую из трёх тел. Это могут быть три звезды, испытывающие воздействие со стороны соседних космических тел. На тела системы действуют внешние силы $\vec{F}_i$ (i — номер тела; например, $\vec{F}_2$ — это сумма внешних сил, действующих на тело номер два). Между телами действуют силы $\vec{F}_{ik}$, называемые внутренними силами (рис. 5.3). Здесь первая буква i в индексе означает номер тела, на которое действует сила $\vec{F}_{ik}$, а вторая буква k означает номер тела, со стороны которого действует данная сила. На основании третьего закона Ньютона

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}. \qquad (5.3.1)$$

Вследствие действия сил на тела системы их импульсы изменяются. Если за малый промежуток времени сила заметно не меняется, то для каждого тела системы можно записать изменение импульса в форме уравнения (5.2.3):

$$\Delta(m_1\vec{v}_1) = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_1)\Delta t,$$

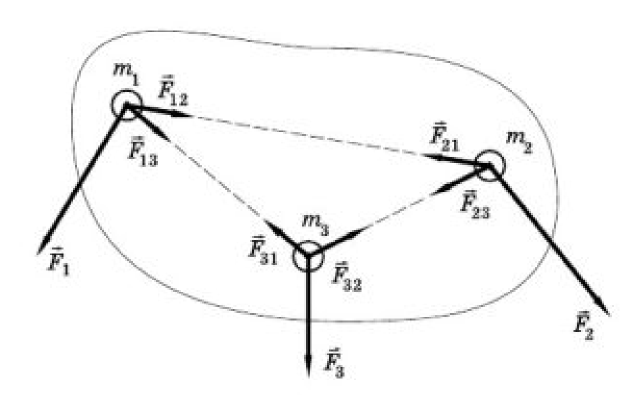


Рис. 5.3

$$\Delta(m_2\vec{v}_2) = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_2)\Delta t, \qquad (5.3.2)$$

$$\Delta(m_3\vec{v}_3) = (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_3)\Delta t.$$

Здесь в левой части каждого уравнения стоит изменение импульса тела $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ за малое время Δt.

Более подробно: $\Delta(m_i\vec{v}_i) = m_i\vec{v}_{i\text{к}} - m_i\vec{v}_{i\text{н}}$, где $\vec{v}_{i\text{н}}$ — скорость в начале, а $\vec{v}_{i\text{к}}$ — в конце интервала времени Δt.

Сложим левые и правые части уравнений (5.3.2) и покажем, что сумма изменений импульсов отдельных тел равна изменению суммарного импульса всех тел системы, равного

$$\vec{p}_\text{с} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3. \qquad (5.3.3)$$

Действительно,

$$\Delta(m_1\vec{v}_1) + \Delta(m_2\vec{v}_2) + \Delta(m_3\vec{v}_3) =$$
$$= m_1\vec{v}_{1\text{к}} - m_1\vec{v}_{1\text{н}} + m_2\vec{v}_{2\text{к}} - m_2\vec{v}_{2\text{н}} + m_3\vec{v}_{3\text{к}} - m_3\vec{v}_{3\text{н}} =$$
$$= (m_1\vec{v}_{1\text{к}} + m_2\vec{v}_{2\text{к}} + m_3\vec{v}_{3\text{к}}) - (m_1\vec{v}_{1\text{н}} + m_2\vec{v}_{2\text{н}} + m_3\vec{v}_{\text{н}}) =$$
$$= \vec{p}_{\text{с. к}} - \vec{p}_{\text{с. н}} = \Delta\vec{p}_\text{с}.$$

Таким образом,

$$\Delta\vec{p}_\text{с} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\Delta t. \qquad (5.3.4)$$

Но силы взаимодействия любой пары тел в сумме дают нуль, так как, согласно формуле (5.3.1),

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}, \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}.$$

Поэтому изменение импульса системы тел $\Delta\vec{p}_\text{с}$ равно импульсу внешних сил:

$$\Delta\vec{p}_\text{с} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\Delta t. \qquad (5.3.5)$$

Мы пришли к важному выводу: *импульс системы тел могут изменить только внешние силы, причём изменение импульса системы пропорционально сумме внешних сил и совпадает с ней по направлению. Внутренние силы, изменяя импульсы отдельных тел системы, не изменяют суммарный импульс системы.*

Уравнение (5.3.5) справедливо для любого интервала времени, если сумма внешних сил остаётся постоянной.

Закон сохранения импульса

Из уравнения (5.3.5) вытекает чрезвычайно важное следствие. Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то равно нулю и изменение импульса системы: $\Delta\vec{p}_с = 0$. Это означает, что, какой бы интервал времени мы ни взяли, суммарный импульс в начале этого интервала $\vec{p}_{с.\,н}$ и в его конце $\vec{p}_{с.\,к}$ один и тот же: $\vec{p}_{с.\,н} = \vec{p}_{с.\,к}$. Импульс системы остаётся неизменным, или, как говорят, сохраняется:

$$\boxed{\vec{p}_с = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3.} \qquad (5.3.6)$$

Закон сохранения импульса формулируется так: **если сумма внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то импульс системы сохраняется.** Тела могут только обмениваться импульсами, суммарное же значение импульса не изменяется. Надо только помнить, что сохраняется векторная сумма импульсов, а не сумма их модулей.

Как видно из сделанного нами вывода, закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона. Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* или *изолированной*. В замкнутой системе тел импульс сохраняется. Но область применения закона сохранения импульса шире: если даже на тела системы действуют внешние силы, но их сумма равна нулю, импульс системы всё равно сохраняется.

Полученный результат легко обобщается на случай системы, содержащей произвольное число N тел:

$$m_1\vec{v}_{1н} + m_2\vec{v}_{2н} + m_3\vec{v}_{3н} + \ldots + m_N\vec{v}_{Nн} =$$
$$= m_1\vec{v}_{1к} + m_2\vec{v}_{2к} + m_3\vec{v}_{3к} + \ldots + m_N\vec{v}_{Nк}. \qquad (5.3.7)$$

Здесь $\vec{v}_{iн}$ — скорости тел в начальный момент времени, а $\vec{v}_{iк}$ — в конечный. Так как импульс — величина векторная, то уравнение (5.3.7) представляет собой компактную запись трёх уравнений для проекций импульса системы на координатные оси.

Когда выполняется закон сохранения импульса?

Все реальные системы, конечно, не являются замкнутыми, сумма внешних сил довольно редко может оказаться равной нулю. Тем не менее в очень многих случаях закон сохранения импульса можно применять.

Если сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций сил на какое-то направление, то проекция импульса системы на это направление сохраняется. Например, система тел на Земле или вблизи её поверхности не может быть замкнутой, так как на все тела действует сила тяжести, которая изменяет импульс по вертикали согласно уравнению (5.3.5). Однако вдоль горизонтального направления сила тяжести не может изменять импульс, и сумма проекций импульсов тел на горизонтально направленную ось будет оставаться неизменной, если действием сил сопротивления можно пренебречь.

Кроме того, при быстрых взаимодействиях (взрыв снаряда, выстрел из орудия, столкновения атомов и т. п.) изменение импульсов отдельных тел будет фактически обусловлено только внутренними силами. Импульс системы сохраняется при этом с большой точностью, ибо такие внешние силы, как сила тяготения и сила трения, зависящая от скорости, заметно не изменяют импульса системы. Они малы по сравнению с внутренними силами. Так, скорость осколков снаряда при взрыве в зависимости от калибра может изменяться в пределах 600—1000 м/с. Интервал времени, за который сила тяжести смогла бы сообщить телам такую скорость, равен

$$\Delta t = \frac{m\Delta v}{mg} \approx 100 \text{ с.}$$

Внутренние же силы давления газов сообщают такие скорости за 0,01 с, т. е. в 10 000 раз быстрее.

Из второго и третьего законов Ньютона мы получили важнейшее следствие — закон сохранения импульса. Если сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется. Закон сохранения импульса выполняется для любых систем — будь то космические тела, атомы или элементарные частицы.

? **1.** Чему равна сумма сил, действующих между молекулами воды в стакане?

2. Навстречу друг другу летят с равными по модулю скоростями два одинаковых пластилиновых шарика. После столкновения шарики останавливаются. Куда деваются их импульсы?

3. В лежащий на столе брусок попадает пуля, летящая горизонтально, и застревает в нём. Можно ли для нахождения скорости бруска с пулей применить закон сохранения импульса, несмотря на наличие трения?

§ 5.4. РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ МЕЩЕРСКОГО. РЕАКТИВНАЯ СИЛА

Любую задачу в механике можно решить с помощью законов Ньютона. Однако применение закона сохранения импульса во многих случаях значительно упрощает решение. Большое значение имеет закон сохранения импульса для исследования реактивного движения.

Какое движение называется реактивным?

Под реактивным движением понимают движение тела, возникающее при отделении некоторой его части с определённой скоростью относительно тела, например при истечении продуктов сгорания из сопла реактивного летательного аппарата. При этом появляется так называемая **реактивная сила**, сообщающая телу ускорение.

Наблюдать реактивное движение очень просто. Надуйте детский резиновый шарик и отпустите его. Шарик стремительно взовьётся вверх (рис. 5.4). Движение, правда, будет кратковременным. Реактивная сила действует лишь до тех пор, пока продолжается истечение воздуха.

Главная особенность реактивной силы состоит в том, что она возникает без какого-либо взаимодействия с внешними телами. Происходит лишь взаимодействие между ракетой и вытекающей из неё струёй вещества.

Сила же, сообщающая ускорение автомобилю или пешеходу на земле, пароходу на воде или винтовому самолёту в воздухе, возникает только за счёт взаимодействия этих тел с землёй, водой или воздухом.

При истечении продуктов сгорания топлива они за счёт давления в камере сгорания приобретают некоторую скорость относительно ракеты и, следовательно, некоторый импульс. Поэтому в соответствии с законом сохранения импульса сама ракета получает такой же по модулю импульс, но направленный в противоположную сторону.

Масса ракеты с течением времени убывает. Ракета в полёте является телом переменной массы. Для расчёта её движения удобно применить закон сохранения импульса.

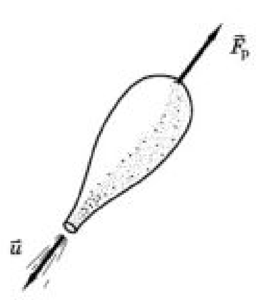


Рис. 5.4

Уравнение Мещерского

Выведем уравнение движения ракеты и найдём выражение для реактивной силы. Будем считать, что скорость вытекающих из ракеты газов относительно ракеты постоянна и равна $\vec{u}$. Внешние силы на ракету не действуют: она находится в космическом пространстве вдали от звёзд и планет.

Пусть в некоторый момент времени скорость ракеты относительно инерциальной системы, связанной со звёздами, равна $\vec{v}$ (рис. 5.5, *а*), а масса ракеты равна M. Через малый интервал времени Δt масса ракеты станет равной

$$M_1 = M - \mu\Delta t,$$

где μ — расход топлива[1].

За этот же промежуток времени скорость ракеты изменится на $\Delta\vec{v}$ и станет равной $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Скорость истечения газов относительно выбранной инерциальной системы отсчёта равна $\vec{v} + \vec{u}$ (рис. 5.5, *б*), так как до начала сгорания топливо имело ту же скорость, что и ракета.

Запишем закон сохранения импульса для системы ракета — газ:

$$M\vec{v} = (M - \mu\Delta t)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \mu\Delta t(\vec{v} + \vec{u}).$$

Раскрыв скобки, получим

$$M\vec{v} = M\vec{v} - \mu\Delta t\vec{v} + M\Delta\vec{v} - \mu\Delta t\Delta\vec{v} + \mu\Delta t\vec{v} + \mu\Delta t\vec{u}.$$

Слагаемым $\mu\Delta t\Delta\vec{v}$ можно пренебречь по сравнению с остальными, так как оно содержит произведение двух малых величин (это величина, как говорят, второго порядка малости). После приведения подобных членов будем иметь

$$M\Delta\vec{v} = -\mu\Delta t\vec{u},$$

или

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\mu\vec{u}. \qquad (5.4.1)$$

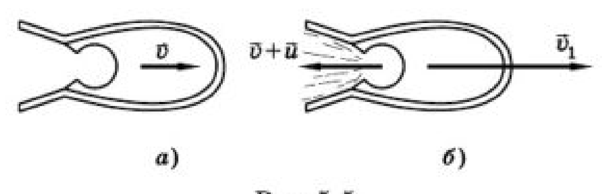


Рис. 5.5

[1] **Расходом топлива** называется отношение массы сгоревшего топлива ко времени его сгорания.

Это одно из уравнений Мещерского[1] для движения тела переменной массы, полученное им в 1897 г.

Если ввести обозначение $\vec{F}_р = -\mu\vec{u}$, то уравнение (5.4.1) совпадёт по форме записи со вторым законом Ньютона. Однако масса тела M здесь не постоянна, а убывает со временем из-за потери вещества.

Величина $\vec{F}_р = -\mu\vec{u}$ носит название реактивной силы. Она появляется вследствие истечения газов из ракеты, приложена к ракете и направлена противоположно скорости газов относительно ракеты. Реактивная сила определяется лишь скоростью истечения газов относительно ракеты и расходом топлива. Существенно, что она не зависит от деталей устройства двигателя. Важно лишь, чтобы двигатель обеспечивал истечение газов из ракеты со скоростью $\vec{u}$ при расходе топлива μ. Реактивная сила космических ракет достигает 1000 кН.

Если на ракету действуют внешние силы, то её движение определяется реактивной силой и суммой внешних сил. В этом случае уравнение (5.4.1) запишется так:

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}_р + \vec{F}. \quad (5.4.2)$$

Принцип реактивного движения основан на том, что истекающие из реактивного двигателя газы получают импульс. Такой же по модулю импульс приобретает ракета.

? 1. Реактивное движение совершает кальмар (рис. 5.6). Как это ему удаётся?

2. Может ли парусная лодка приводиться в движение с помощью компрессора, установленного на лодке, если струя воздуха направлена на паруса? Что произойдёт, если поток воздуха будет направлен мимо парусов?

3. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газов относительно ракеты меньше скорости самой ракеты и вытекающие из сопла газы летят вслед за ракетой?

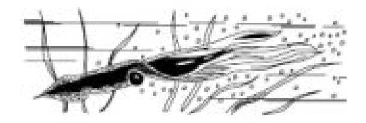


Рис. 5.6

[1] Мещерский И. В. (1859—1935) — профессор Петербургского политехнического института. Его труды по механике тел переменной массы стали теоретической основой ракетной техники.

§ 5.5. РЕАКТИВНЫЕ ДВИГАТЕЛИ

Широкое применение реактивные двигатели в настоящее время получили в связи с освоением космического пространства. Применяются они также для метеорологических и военных ракет различного радиуса действия. Кроме того, все современные скоростные самолёты оснащены воздушно-реактивными двигателями.

В космическом пространстве использовать какие-либо другие двигатели, кроме реактивных, невозможно: нет опоры (твёрдой, жидкой или газообразной), отталкиваясь от которой космический корабль мог бы получить ускорение. Применение же реактивных двигателей для самолётов и ракет, не выходящих за пределы атмосферы, связано с тем, что именно реактивные двигатели способны обеспечить максимальную скорость полёта.

Реактивные двигатели делятся на два класса: ракетные и воздушно-реактивные.

В ракетных двигателях топливо и необходимый для его горения окислитель находятся непосредственно внутри двигателя или в его топливных баках.

На рисунке 5.7 показана схема ракетного двигателя на твёрдом топливе. Порох или какое-либо другое твёрдое топливо, способное к горению в отсутствие воздуха, помещают внутрь камеры сгорания двигателя.

При горении топлива образуются газы, имеющие очень высокую температуру и оказывающие давление на стенки камеры. Сила давления на переднюю стенку камеры больше, чем на заднюю, где расположено сопло. Вытекающие через сопло газы не встречают на своём пути стенку, на которую могли бы оказывать давление. В результате появляется сила, толкающая ракету вперёд.

Суженная часть камеры — сопло служит для увеличения скорости истечения продуктов сгорания, что, в свою очередь, повышает реактивную силу. Сужение струи газа вызывает увеличение его скорости, так как при этом через мень-

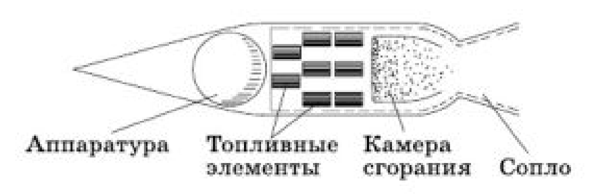


Рис. 5.7

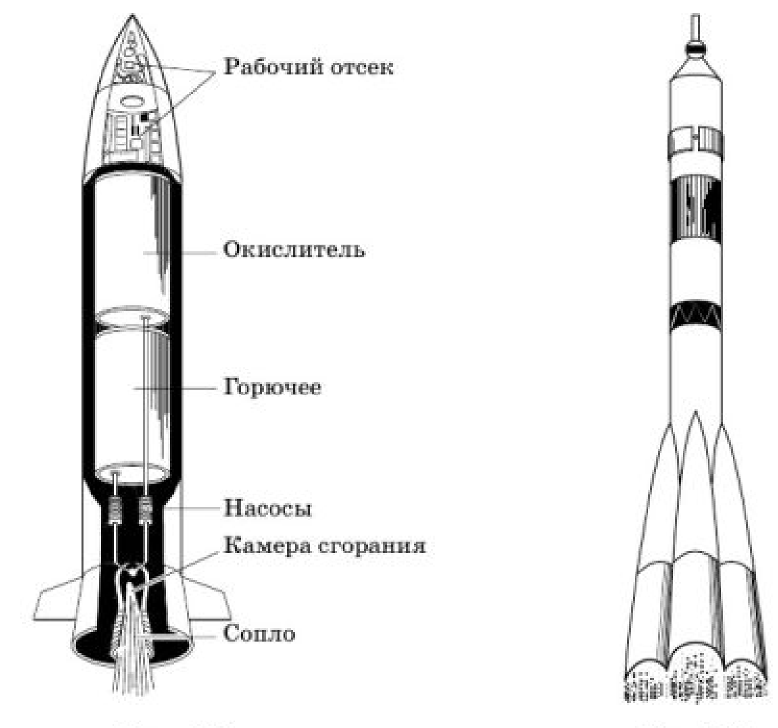


Рис. 5.8

Рис. 5.9

шее поперечное сечение в единицу времени должна пройти такая же масса газа, что и при большем поперечном сечении.

Применяются также ракетные двигатели, работающие на жидком топливе.

В жидкостно-реактивных двигателях (ЖРД) в качестве горючего можно использовать керосин, бензин, спирт, анилин, жидкий водород и др., а в качестве окислителя, необходимого для горения, — жидкий кислород, азотную кислоту, жидкий фтор, пероксид водорода и др. Горючее и окислитель хранятся отдельно в специальных баках и с помощью насосов подаются в камеру, где при сгорании топлива развивается температура до 3000 °C и давление до 50 атм (рис. 5.8). В остальном двигатель работает так же, как и двигатель на твёрдом топливе.



Жидкостно-реактивные двигатели используются для запуска космических кораблей (рис. 5.9).

Воздушно-реактивные двигатели в настоящее время применяют главным образом на самолётах (рис. 5.10). Основное их отличие от ракетных двигателей состоит в том, что окис-

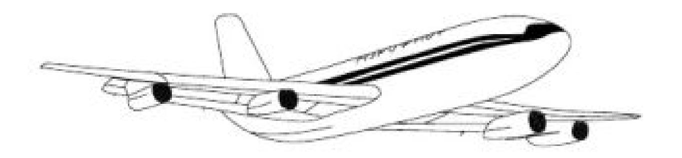


Рис. 5.10

лителем для горения топлива служит кислород воздуха, поступающего внутрь двигателя из атмосферы.

На рисунке 5.11 изображена схема воздушно-реактивного двигателя турбокомпрессорного типа. В носовой части расположен компрессор, засасывающий и сжимающий воздух, который затем поступает в камеру сгорания. Жидкое горючее (обычно используется керосин) подаётся в камеру сгорания с помощью специальных форсунок.

Раскалённые газы (продукты сгорания), выходя через сопло, вращают газовую турбину, приводящую в движение компрессор. Турбокомпрессорные двигатели установлены в наших лайнерах Ил-96, Ту-204, истребителях Су-35 и др.

Реактивными двигателями оснащены не только ракеты, но и бóльшая часть современных самолётов.

§ 5.6. УСПЕХИ В ОСВОЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Автором первого в мире проекта реактивного летательного аппарата для полёта людей был русский революционер-народоволец Н. И. Кибальчич (1853—1881).

Основы теории реактивного двигателя и научное доказательство возможности полётов в межпланетном пространстве были впервые высказаны и разработаны русским учёным

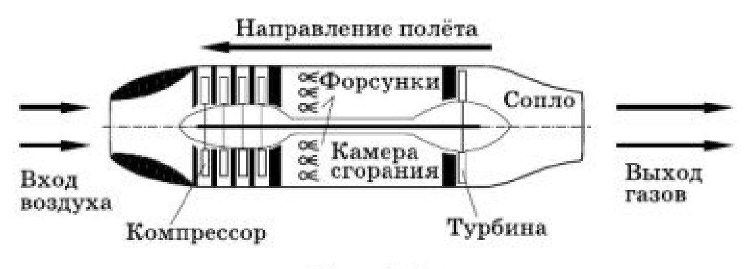
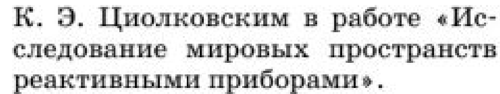


Рис. 5.11



К. Э. Циолковским в работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами».

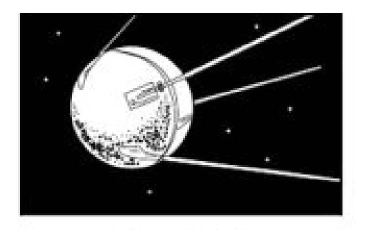


Рис. 5.12

К. Э. Циолковскому принадлежит также идея применения многоступенчатых ракет. Отдельные ступени, из которых составлена ракета, снабжаются собственными двигателями и запасом топлива. По мере выгорания топлива каждая очередная ступень отделяется от ракеты. Поэтому в дальнейшем на ускорение её корпуса и двигателя топливо не расходуется.

Идея Циолковского о сооружении большой станции-спутника на орбите вокруг Земли, с которой будут стартовать ракеты к другим планетам Солнечной системы, ещё не осуществлена, но нет сомнения в том, что рано или поздно такая станция будет создана.

В настоящее время становится реальностью пророчество Циолковского: «Человечество не останется вечно на Земле, но в погоне за светом и пространством сначала робко проникнет за пределы атмосферы, а затем завоюет себе всё околосолнечное пространство».

Нашей стране принадлежит великая честь запуска 4 октября 1957 г. первого искусственного спутника Земли (рис. 5.12).

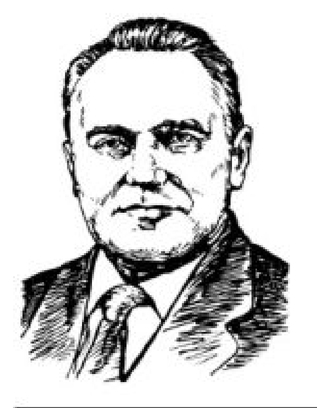




Циолковский Константин Эдуардович (1857—1935) — знаменитый русский учёный, основоположник теории межпланетных сообщений, изобретатель в области реактивных летательных аппаратов, воздухоплавания, аэродинамики.

В 1903 г. в работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами» Циолковский создал теорию полёта ракеты с учётом изменения её массы в процессе движения и выдвинул идею о применении ракетных двигателей для межпланетных кораблей.

В 1929 г. им была создана теория движения составных (ступенчатых) ракет. Такие ракеты теперь являются основными в космонавтике. Они используются для вывода на орбиты искусственных спутников Земли и запуска космических аппаратов к Луне и планетам Солнечной системы.



Королёв Сергей Павлович (1907—1966) — академик, выдающийся учёный, конструктор ракет, человек, с именем которого связано начало космической эры. Первый искусственный спутник, первый полёт человека в космос были осуществлены под его руководством. С. П. Королёв — генеральный конструктор космических кораблей «Восток» и «Восход».

Также 12 апреля 1961 г. нашей страной был осуществлён полёт космического корабля с космонавтом Ю. А. Гагариным на борту — первый в мире полёт человека в космос.

Эти полёты были совершены на ракетах, сконструированных отечественными учёными и инженерами под руководством С. П. Королёва.

Большие заслуги в исследовании космического пространства имеют американские учёные, инженеры и астронавты. Два американских астронавта из экипажа космического корабля «Аполлон-11» — Нейл Армстронг и Эдвин Олдрин — 20 июля 1969 г. впервые совершили посадку на Луну. На космическом теле Солнечной системы человеком были сделаны первые шаги.

С выходом человека в космос не только открылись возможности исследования других планет, но и представились поистине фантастические возможности изучения природ-



Гагарин Юрий Алексеевич (1934—1968) — лётчик-космонавт, первый человек, совершивший полёт в космос. 12 апреля 1961 г. впервые в мире совершил полёт в космос на корабле-спутнике «Восток», облетев земной шар за 1 ч 48 мин. Принимая непосредственное участие в обучении и тренировке космонавтов, руководил космическими полётами. 27 марта 1968 г. Ю. А. Гагарин трагически погиб при выполнении тренировочного полёта на самолёте. Именем Гагарина назван кратер на обратной (невидимой с Земли) стороне Луны.

ных явлений и ресурсов Земли, о которых можно было только мечтать. Возникло космическое природоведение. Раньше общая карта Земли составлялась по крупицам, как мозаичное панно. Теперь снимки с орбиты, охватывающие миллионы квадратных километров, позволяют выбирать для исследования наиболее интересные участки земной поверхности, экономя тем самым силы и средства.

Из космоса лучше различаются крупные геологические структуры: плиты, глубинные разломы земной коры — места наиболее вероятного залегания полезных ископаемых. Из космоса удалось обнаружить новый тип геологических образований — кольцевые структуры, подобные кратерам Луны и Марса.

Сейчас на орбитальных комплексах разработаны технологии получения материалов, которые нельзя изготовить на Земле, а только в состоянии длительной невесомости в космосе. Стоимость этих материалов (сверхчистые монокристаллы и др.) близка к затратам на запуск космических аппаратов.

? Представьте в виде обобщающей и систематизирующей схемы информацию о законе сохранения импульса.

§ 5.7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Закон сохранения импульса целесообразно применять для решения тех задач, в которых требуется определять скорости, а не силы или ускорения. Конечно, решать подобные задачи можно, используя законы Ньютона. Но применение закона сохранения импульса упрощает решение.

Прежде чем решать задачу с помощью закона сохранения импульса, надо выяснить, можно ли его применять в данном случае. Закон можно применять для замкнутой системы или же в случае, когда сумма проекций сил на какое-либо направление равна нулю, а также когда импульсом внешних сил можно пренебречь.

Для решения задачи нужно записать закон в векторной форме (5.3.7).

После этого векторное уравнение записывают в проекциях на оси выбранной системы координат[1].

---

[1] Иногда целесообразно решать задачу, используя закон сложения векторов.

Выбор направления осей диктуется удобством решения задачи. Если, например, все тела движутся вдоль одной прямой, то координатную ось целесообразно направить вдоль этой прямой.

При решении некоторых задач приходится использовать дополнительно уравнения кинематики.

Некоторые задачи решаются с применением уравнения изменения импульса в форме (5.3.5).

Задача 1

Стальной шарик массой 0,05 кг падает с высоты 5 м на стальную плиту. После столкновения шарик отскакивает от плиты с такой же по модулю скоростью. Найдите силу, действующую на плиту при ударе, считая её постоянной. Время соударения равно 0,01 с.

Решение. При ударе шар и плита действуют друг на друга с силами, равными по модулю, но противоположными по направлению. Определив силу, действующую на шарик со стороны плиты, мы тем самым найдём силу, с которой шарик действовал на плиту за время Δt, в течение которого длится соударение.

Во время соударения на шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$ со стороны плиты (рис. 5.13). Согласно уравнению (5.2.3),

$$\Delta\vec{p} = (\vec{F} + m\vec{g})\Delta t.$$

Обозначим через $\vec{v}_1$ скорость шарика непосредственно до удара о плиту, а через $\vec{v}_2$ — скорость после удара, тогда изменение импульса шарика $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$; поэтому

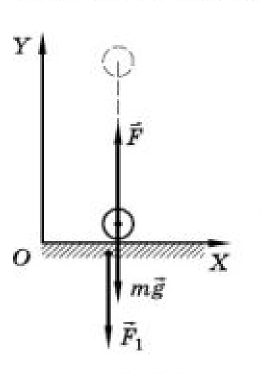


Рис. 5.13

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = (\vec{F} + m\vec{g})\Delta t.$$

В проекциях на ось Y это уравнение запишется так:

$$mv_2 - (-mv_1) = (F - mg)\Delta t.$$

Учитывая, что $v_2 = v_1 = v$, получим

$$F = mg + \frac{2mv}{\Delta t}. \qquad (5.7.1)$$

Модуль скорости шарика при падении его с высоты h определяется по формуле $v = \sqrt{2gh} = 10$ м/с. Теперь, используя выражение (5.7.1), найдём модуль силы $\vec{F}$:

$$F = 0,5 \text{ Н} + 100 \text{ Н} = 100,5 \text{ Н}.$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}.$$

Следовательно, $F_1 = 100,5$ Н; эта сила приложена к плите и направлена вниз.

Заметим, что чем меньше время взаимодействия Δt, тем большим будет значение величины $\frac{2mv}{\Delta t}$ в формуле (5.7.1) по сравнению с mg. Поэтому при соударении можно не учитывать силу тяжести. Если бы шар был сделан из пластилина, то он бы прилип к плите и модуль изменения его импульса был бы в два раза меньше. Соответственно и сила, действующая на плиту, была бы также в два раза меньше.

Задача 2

Во время манёвров на железнодорожной станции две платформы массами $m_1 = 2,4 \cdot 10^4$ кг и $m_2 = 1,6 \cdot 10^4$ кг двигались навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны $v_1 = 0,5$ м/с и $v_2 = 1$ м/с. Найдите скорость их совместного движения после того, как сработала автосцепка.

Решение. Изобразим схематично движущиеся платформы до столкновения (рис. 5.14). Внешние силы $\vec{N}_1$ и $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_2$ и $m_2\vec{g}$, действующие на тела системы, взаимно уравновешены.

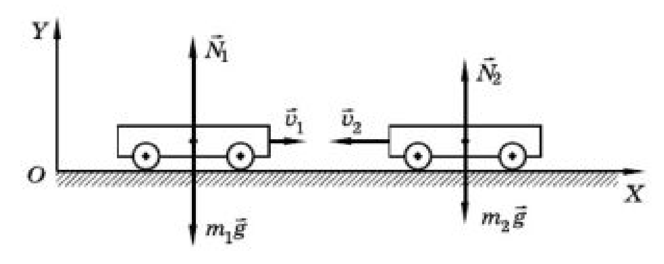


Рис. 5.14

На платформы действуют ещё силы трения, которые являются внешними для системы. При качении платформ по рельсам силы трения невелики, поэтому за малый интервал времени столкновения они заметно не изменят импульс системы. Следовательно, можно применить закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ — скорость платформ после сцепки.

В проекциях на ось X имеем

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)u_x.$$

Так как $v_{1x} = v_1$, а $v_{2x} = -v_2$, то

$$u_x = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0{,}1 \text{ м/с}.$$

Отрицательный знак проекции скорости показывает, что скорость направлена противоположно оси X (справа налево).

Задача 3

Два пластилиновых шарика, отношение масс которых $\frac{m_2}{m_1} = 4$, после соударения слиплись и стали двигаться по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{u}$ (рис. 5.15, вид сверху). Определите скорость лёгкого шара до соударения[1], если он двигался втрое быстрее тяжёлого ($v_1 = 3v_2$), а направления движения шаров были взаимно перпендикулярны. Трением пренебречь.

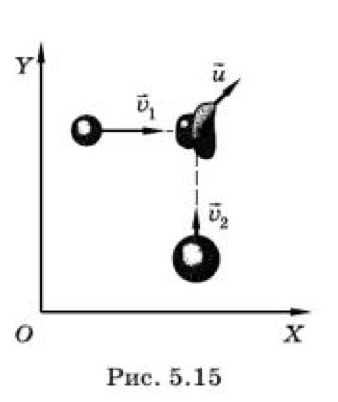


Рис. 5.15

Решение. Так как скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шаров взаимно перпендикулярны, то оси прямоугольной системы координат удобно направить параллельно этим скоростям.

Согласно закону сохранения импульса имеем

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

[1] Если после соударения тела движутся с одинаковой скоростью, то такой удар называется абсолютно неупругим.

Запишем это уравнение в проекциях на оси X и Y, проведённые так, как показано на рисунке 5.15:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)u_x,$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2)u_y.$$

Так как $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = 0$, $v_{1y} = 0$ и $v_{2y} = v_2$, то

$$u_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{3}{5}v_2, \quad u_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4}{5}v_2.$$

Модуль скорости $\vec{u}$ равен

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_2.$$

Итак, $v_2 = u$, следовательно, $v_1 = 3u$.

Задача 4

Кузнечик сидит на конце соломинки длиной l, которая лежит на гладком полу. Кузнечик прыгает и попадает на другой конец соломинки. С какой минимальной начальной скоростью относительно пола $\vec{v}_{min}$ он должен прыгнуть, если его масса M, а масса соломинки m? Сопротивление воздуха и трение не учитывать.

Решение. Направим ось Y вверх, а ось X вдоль соломинки по направлению прыжка кузнечика (рис. 5.16). Проекции скорости $\vec{v}$ кузнечика на координатные оси соответственно равны

$$v_x = v\cos\alpha \text{ и } v_y = v\sin\alpha.$$

Рассмотрим систему кузнечик — соломинка. На тела системы внешние силы действуют лишь по вертикальному направлению (трение отсутствует).

Так как сумма проекций внешних сил на ось X равна нулю, то сохраняется сумма проекций импульсов кузнечика и соломинки на ось X:

$$Mv_x + mv_{1x} = 0,$$

или

$$Mv\cos\alpha + mv_{1x} = 0,$$

где v_{1x} — проекция скорости соломинки относительно пола.

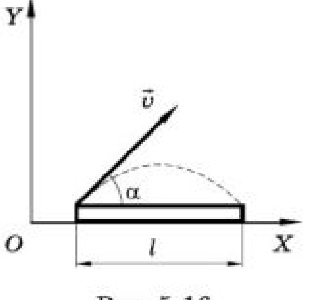


Рис. 5.16

Отсюда

$$v_{1x} = -\frac{Mv\cos\alpha}{m}.$$

Знак «минус» указывает, что соломинка получает скорость $\vec{v}_1$, направленную противоположно оси X.

Далее задача решается с помощью формул кинематики (см. § 1.24). Время полёта кузнечика

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

По горизонтальному направлению кузнечик относительно соломинки пролетит расстояние l.

Следовательно, модуль горизонтальной составляющей его скорости относительно движущейся соломинки равен

$$v_{\text{от}} = \frac{l}{t} = \frac{gl}{2v\sin\alpha}.$$

Согласно закону сложения скоростей,

$$v_{\text{от}} = -v_{1x} + v\cos\alpha = \left(\frac{M}{m} + 1\right)v\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{gl}{2v\sin\alpha} = \left(\frac{M}{m} + 1\right)v\cos\alpha.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{mgl}{(M+m)\sin 2\alpha}}.$$

Очевидно, что модуль скорости кузнечика минимален тогда, когда максимален знаменатель дроби полученного выражения. Как известно, значение синуса не может быть больше 1. Итак,

$$\sin 2\alpha = 1,\ \alpha = 45° \text{ и } v_{\min} = \sqrt{\frac{mgl}{M+m}}.$$

Задача 5

В начальный момент времени ракета массой M имела скорость v_0. В конце каждой секунды из ракеты выбрасывается порция газа массой m. Скорость порции газа отличается от скорости ракеты до сгорания данной массы газа на постоян-

ное значение, равное u, т. е. скорость истечения газа постоянна. Определите скорость ракеты через n секунд. Действие силы тяжести не учитывать.

Решение. Обозначим через v_k скорость ракеты в конце k-й секунды. В конце $(k + 1)$-й секунды из ракеты выбрасывается газ массой m, который уносит с собой импульс, равный $m(-u + v_k)$. Из закона сохранения импульса, записанного для модулей векторов, следует, что

$$(M - km)v_k = [M - (k + 1)m]v_{k+1} + m(-u + v_k).$$

Изменение скорости ракеты за 1 с равно

$$v_{k+1} - v_k = \frac{mu}{M - (k+1)m}.$$

Зная изменение скорости за 1 с, можно написать выражение для скорости в конце n-й секунды:

$$v_n = v_0 + u\left(\frac{m}{M - m} + \frac{m}{M - 2m} + \ldots + \frac{m}{M - nm}\right).$$

Упражнение 10

1. Свинцовый шар массой 200 г движется перпендикулярно стене со скоростью 10 м/с и сталкивается с ней. Найдите силу, действующую на стену при ударе, считая её постоянной. Время столкновения равно 0,01 с. Шар не отскакивает от стены.

2. Стальной шар массой 100 г движется по горизонтальной поверхности без трения в направлении, перпендикулярном стене. Скорость шара до удара равна 10 м/с. После соударения шар отскакивает от стены с такой же по модулю скоростью, но в противоположном направлении. Найдите силу, действующую на стену при ударе, считая её постоянной. Время соударения 0,01 с.

3. По рельсам в горизонтальном направлении катится тележка с песком. Через отверстие в дне песок ссыпается между рельсами. Изменяется ли скорость тележки? Трение не учитывать.

4. На платформу массой 600 кг, движущуюся горизонтально со скоростью 1 м/с, насыпали сверху 200 кг щебня. Чему стала равна скорость платформы?

5. Ракета, масса которой вместе с зарядом равна 250 г, взлетает вертикально вверх и достигает высоты 150 м. Опре-

делите скорость истечения газов из ракеты, считая, что сгорание заряда происходит мгновенно. Масса заряда равна 50 г.

6. Призма массой M с углом наклона α находится на гладком льду. На призме у её основания стоит собака массой m. С какой скоростью будет двигаться призма, если собака побежит вверх по призме со скоростью v относительно неё?

7. Граната, брошенная от поверхности Земли, разрывается на два одинаковых осколка в наивысшей точке траектории на расстоянии a от места бросания, считая по горизонтали. Один из осколков летит в обратном направлении с той же по модулю скоростью, которую имела граната до разрыва. На каком расстоянии l от места бросания упадёт второй осколок?

8. Две ракеты массой M каждая летят в одном направлении: одна со скоростью v, а другая со скоростью $v_1 = 1{,}1v$. Когда одна ракета догнала другую, на короткое время был включён двигатель первой ракеты. Какую массу отработанного топлива она должна выбросить со скоростью $v_2 = 3v$ относительно ракеты, чтобы скорости ракет для совершения безопасной стыковки стали равными?

9. Две лодки идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями. При встрече лодки обмениваются грузами, имеющими одинаковую массу. Обмен может происходить двумя способами: 1) сначала с одной лодки на другую перебрасывают груз, а затем со второй лодки перебрасывают груз обратно на первую; 2) грузы перебрасывают из лодки в лодку одновременно. При каком способе скорость лодок после перебрасывания грузов будет больше?

10. Три лодки с одинаковыми массами M движутся по инерции друг за другом с одинаковыми скоростями v. Из средней лодки в крайние одновременно перебрасывают грузы массой m со скоростью u относительно лодок. Какие скорости будут иметь лодки после перебрасывания грузов? Сопротивление воды и присоединённую массу не учитывать.

11. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на два одинаковых осколка. Первый осколок получает скорость, направленную вертикально вниз, и падает под местом разрыва, а второй оказывается на расстоянии l по горизонтали от этого места. Определите модуль скорости сна-

ряда перед разрывом и модуль скорости второго осколка, если известно, что взрыв произошёл на высоте H и первый осколок достиг поверхности Земли через промежуток времени, равный t.

12. Человек, находящийся в лодке, переходит с её носовой части на корму. На какое расстояние относительно воды переместится лодка длиной l, если масса человека m_1, а масса лодки m_2? Сопротивление воды и присоединённую массу не учитывать.

13. Клин с углом α при основании может без трения перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 5.17). При каком соотношении масс m_1 и m_2 грузов, связанных нитью, перекинутой через блок, клин будет неподвижен и при каком соотношении масс клин начнёт перемещаться вправо или влево? Коэффициент трения между грузом массой m_2 и клином равен μ.

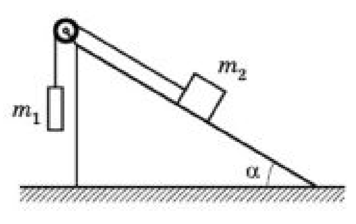


Рис. 5.17

14. Снаряд, запущенный вертикально вверх, разрывается в самой верхней точке подъёма на два одинаковых осколка, один из которых летит вверх, а другой — вниз. С какой скоростью упадёт на землю второй осколок, если первый падает на неё со скоростью v?

15. Элементарная частица распадается на две части массами m_1 и m_2, имеющие скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, угол между которыми равен α. Чему равен импульс частицы до распада?

16. Водомётный катер движется по озеру. Сила сопротивления воды движению катера по модулю равна $F = kv$. Скорость выбрасываемой воды относительно катера равна u. Определите установившуюся скорость катера, если площадь сечения потока воды, выбрасываемой двигателем, равна S, а плотность воды равна ρ.

17. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к броску, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса кобры m, а её длина l.

Подготовьте доклад по теме «Освоение космического пространства: успехи, неудачи, прогнозы» (в виде ретроспективного сравнительного анализа России и западных стран).

Глава 6

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Энергия — самая важная сохраняющаяся величина не только в механике, но и в физике вообще. Понять, что такое энергия, нелегко. Но энергия тесно связана с работой. Мы начнём с изучения работы силы. Эта величина более проста и наглядна.

§ 6.1. ДВИГАТЕЛИ

С точки зрения механики мы с вами и любые двигатели делаем одно и то же.

Наши действия с точки зрения механики

Все наши ежедневные действия сводятся к тому, что мы с помощью мышц либо приводим в движение окружающие тела и поддерживаем это движение, либо же останавливаем движущиеся тела. Этими телами являются орудия труда (молоток, ручка, пила), в играх — мячи, шайбы, шахматные фигуры.

На производстве и в сельском хозяйстве люди также приводят в движение орудия труда. Правда, в настоящее время роль рабочего всё больше и больше сводится к управлению механизмами. Но в любой машине можно обнаружить подобие простых орудий ручного труда. В швейной машине имеется игла; резец токарного станка подобен рубанку; ковш экскаватора заменяет лопату.

Двигатели

Применение машин во много раз увеличивает производительность труда благодаря использованию в них двигателей.

Двигатели могут быть совершенно различными. Автомобили и тракторы приводятся в действие двигателями внутреннего сгорания (рис. 6.1, *а* на с. 318), суда — паровыми турбинами (рис. 6.1, *б*), станки и электровозы — электродвигателями (рис. 6.1, *в*), часы — пружинами или гирями (рис. 6.1, *г*) и т. д. Мышцы человека или руку робота тоже можно рассматривать как своеобразные двигатели (рис. 6.1, *д*).

Назначение любого двигателя состоит в том, чтобы приводить тела в движение и поддерживать это движение, несмотря на торможение как обычным трением, так и «рабочим» сопротивлением (резец должен не просто скользить по металлу, а, врезаясь в него, снимать стружку; плуг должен взрыхлять землю и т. д.). При этом на движущееся тело должна действовать со стороны двигателя сила, точка приложения которой перемещается вместе с телом.

Обиходное представление о работе

Когда человек или какой-либо двигатель действуют с определённой силой на движущееся тело, то мы говорим, что они совершают работу. Это обиходное представление о работе легло в основу формирования одного из важнейших понятий механики — понятия работы силы. Работу совершают, конечно, не только человек или созданные им двигатели. Работа совершается в природе всегда, когда на какое-либо движущееся тело действует сила (или несколько сил) со стороны другого тела (или других тел). Так, сила тяготения совершает работу при падении капель дождя или камня с обрыва. Одновременно совершают работу и силы трения, действующие на падающие капли или камень со стороны воздуха. Совершает работу и сила упругости, когда, например, распрямляется согнутое ветром дерево.

Все мы, как и любые двигатели, совершаем работу: приводим в движение тела, поддерживаем это движение или же прекращаем его.

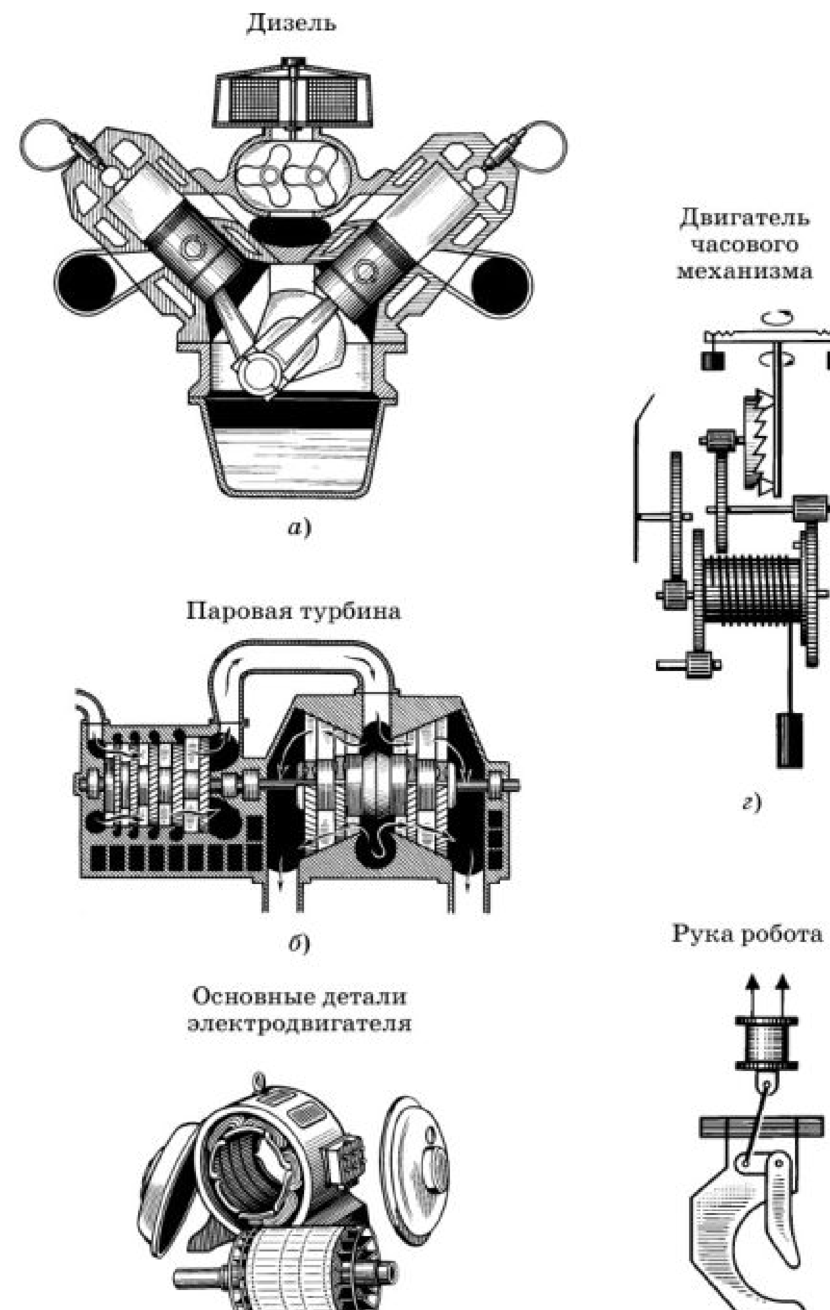

Дизель
а)
Двигатель
часового
механизма
г)
Паровая турбина
б)
Рука робота
Основные детали
электродвигателя
в)
д)

Рис. 6.1

§ 6.2. РАБОТА СИЛЫ

Слово «работа» часто встречается в повседневной жизни в довольно разнообразных смыслах. В основной школе вы уже познакомились с понятием работы в физике. Однако многие существенные моменты этого понятия остались вне поля зрения.

Импульс силы и работа

Второй закон Ньютона, записанный в форме $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, позволяет определить, как меняется скорость тела $\vec{v}$ по модулю и направлению, если на тело в течение времени Δt действует сила $\vec{F}$.

Но во многих случаях важно уметь вычислять изменение скорости по модулю, если при перемещении тела на $\Delta\vec{r}$ на него действует сила $\vec{F}$. Действия сил на тела, приводящие к изменению модуля их скоростей, характеризуются величиной, зависящей как от сил, так и от перемещений тел, на которые эти силы действуют. Эту величину называют работой.

Определение работы

Нужно передвинуть шкаф из одного угла комнаты в другой. Никто не усомнится в том, что совершаемая при этом работа тем больше, чем больше перемещение шкафа. Тяжёлый шкаф требует для своего перемещения большей работы из-за того, что к нему надо прикладывать бóльшую силу. Поэтому естественно считать работу пропорциональной произведению силы на перемещение.

Однако в физике работа определяется несколько иначе. Для приведения тела в движение и для его остановки на тело должна действовать сила, совершающая работу. Но при движении с постоянной скоростью при отсутствии трения совершать работу не нужно. Согласно закону инерции, тело движется с постоянной скоростью без действия на него сил. Не совершается работа и в том случае, когда сила перпендикулярна скорости. В этом случае скорость тела не меняется по модулю (см. § 2.5) и необходимое ускорение телу сообщает сила, перпендикулярная скорости. При движении по окружности модуль этой силы не меняется. Так, камень, раскрученный на верёвке, при отсутствии трения будет двигаться сам собой сколь угодно долго. Работа при этом не совершается. Она необходима только для сообщения камню постоянной скорости.

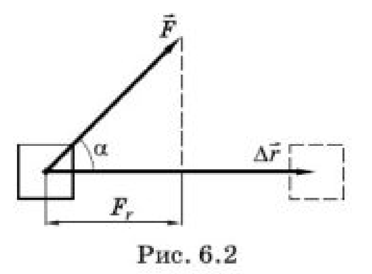


Рис. 6.2

Изменение скорости по модулю возможно лишь в том случае, когда проекция силы на направление перемещения тела F_r отлична от нуля. Именно эта проекция определяет действие силы, изменяющее скорость тела по модулю, а значит, и совершаемую работу. Поэтому работу следует рассматривать как произведение проекции F_r на модуль $|\Delta\vec{r}|$ перемещения (рис. 6.2):

$$A = F_r|\Delta\vec{r}|. \qquad (6.2.1)$$

Если угол между силой и перемещением обозначить через α, то $F_r = F\cos\alpha$. Следовательно, работа равна

$$\boxed{A = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha.} \qquad (6.2.2)$$

Работа силы равна произведению модулей силы и перемещения и косинуса угла между ними.

Формулы (6.2.1) и (6.2.2) справедливы в том случае, когда сила постоянна и перемещение тела происходит вдоль прямой. Малые отрезки траектории всегда можно считать прямолинейными, а силу на малом отрезке — постоянной.

Работа может быть как положительной, так и отрицательной. Знак работы определяется знаком косинуса угла между силой и перемещением. Если $\alpha < 90°$, то работа положительна ($A > 0$), так как косинус острых углов положителен. При $\alpha < 90°$ работа отрицательна, так как косинус тупых углов отрицателен. При $\alpha = 90°$ (сила перпендикулярна перемещению) работа не совершается. Так, сила тяжести не совершает работу при перемещении тела вдоль горизонтальной плоскости. При движении спутника по круговой орбите сила тяготения также не совершает работы.

Работа нескольких сил, действующих на одно тело

Если на тело действует несколько сил, то проекция результирующей силы на перемещение равна сумме проекций отдельных сил:

$$F_r = F_{1r} + F_{2r} + F_{3r} + \ldots . \qquad (6.2.3)$$

Поэтому для работы результирующей силы получим выражение

$$A = F_r|\Delta\vec{r}| = F_{1r}|\Delta\vec{r}| + F_{2r}|\Delta\vec{r}| + F_{3r}|\Delta\vec{r}| + \ldots . \qquad (6.2.4)$$

Итак, **если на тело действует несколько сил, то полная работа (работа всех сил) равна работе результирующей силы.**

Иногда говорят, что работа данной силы равна произведению проекции силы на перемещение, вызванное данной силой. Из формулы (6.2.4) видно, что это неверно. Работа данной силы $\vec{F}_i$ есть произведение проекции $\vec{F}_{ir}$ этой силы на модуль $|\Delta\vec{r}|$ перемещения тела. Не важно, что вызывает перемещение тела. На него, кроме данной силы, могут действовать другие силы. Перемещение зависит от скорости, которую успело приобрести тело. Работа же данной силы всегда определяется произведением этой силы на перемещение тела и на косинус угла между силой и перемещением.

Работа как скалярное произведение силы и перемещения

Из определения работы следует, что она, в отличие от силы и перемещения, является не векторной, а скалярной величиной. В математике произведение модулей двух векторов на косинус угла между ними называют скалярным произведением векторов и записывают так: $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$. Это выражение есть компактная символическая запись произведения $F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha$:

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha.$$

Следовательно, работа равна

$$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}. \qquad (6.2.5)$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ можно выразить через произведения проекций этих векторов. Покажем это для движения на плоскости.

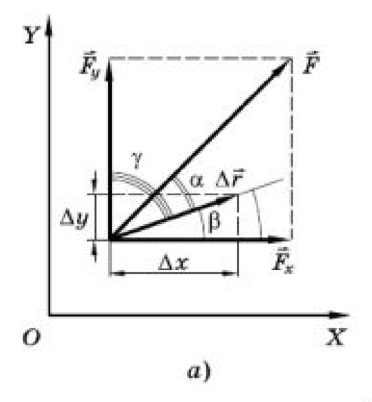
Рисунок 6.3, *а* иллюстрирует случай, когда угол α между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ меньше 90°. Работа при этом положительна. Разложим вектор $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельные осям X и Y: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Тогда работа

$$A = |\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos\beta + |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos\gamma. \qquad (6.2.6)$$

Очевидно, что

$$|\Delta\vec{r}|\cos\beta = \Delta x \text{ и } |\Delta\vec{r}|\cos\gamma = \Delta y,$$

где Δx и Δy — проекции вектора $\Delta\vec{r}$ на соответствующие оси.



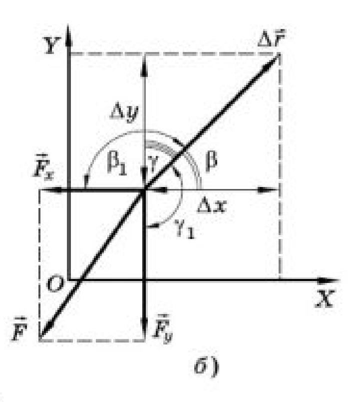


Рис. 6.3

Для данного случая $|\vec{F}_x| = F_x$ и $|\vec{F}_y| = F_y$, так как проекции силы $\vec{F}$ на оси X и Y положительны. Поэтому

$$A = F_x\Delta x + F_y\Delta y. \qquad (6.2.7)$$

Этот результат остаётся справедливым и в том случае, когда сила $\vec{F}$ составляет с перемещением тупой угол и работа отрицательна (рис. 6.3, *б*). Теперь

$$A = |\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos\beta_1 + |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos\gamma_1 =$$
$$= |\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos(180° - \beta) + |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos(180° - \gamma) =$$
$$= -|\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos\beta - |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos\gamma =$$
$$= -|\vec{F}_x|\Delta x - |\vec{F}_y|\Delta y. \qquad (6.2.8)$$

Но в данном случае $|\vec{F}_x| = -F_x$ и $|\vec{F}_y| = -F_y$. Поэтому получаем для работы то же выражение (6.2.7).

В трёхмерном случае эта формула имеет вид

$$A = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z. \qquad (6.2.9)$$

Зависимость работы от системы отсчёта

Если тело, к которому приложена сила, не перемещается в пространстве относительно данной системы отсчёта, то работа силы равна нулю. Так, при скольжении тела по поверхности стола сила трения $\vec{F}_1$, приложенная к телу, совершает работу, а сила трения $\vec{F}_2$, приложенная к поверхности стола, никакой работы в системе отсчёта, связанной с этой поверхностью, не

совершает (рис. 6.4). Дело в том, что точки поверхности, к которым приложена сила трения, не перемещаются. Перемещается при скольжении сама сила трения. (Точнее, она перестаёт действовать на одни неподвижные участки поверхности и начинает действовать на другие.)

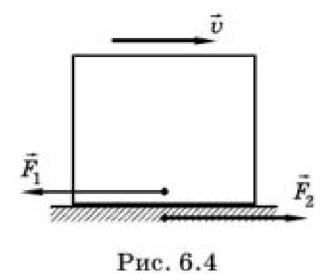


Рис. 6.4

Совершённая работа, конечно, зависит от выбора системы отсчёта. Ведь тело, неподвижное в одной системе отсчёта, будет перемещаться в другой, движущейся относительно первой. Расстояние между телами одинаково во всех системах отсчёта, но перемещение не одинаково. Например, если человек стоит в поезде и просто удерживает растянутую пружину, то в системе отсчёта, связанной с поездом, рука человека не совершает никакой работы, так как свободный конец пружины не перемещается. Но с точки зрения наблюдателя в системе отсчёта, связанной с Землёй, работа будет произведена. При переходе от одной системы отсчёта к другой работа может даже изменить знак, так как направление перемещения зависит от выбора системы отсчёта. Поэтому, когда мы говорим о работе как об определённой величине, нужно указывать, относительно какой системы отсчёта она вычисляется.

Работа в физике и повседневной жизни

Понятие работы в физике отличается от того, что под этим подразумевают в повседневной жизни. Если вы подняли гирю в несколько килограммов и держите её на весу, то с точки зрения механики вы совершили работу только при подъёме груза. Однако непосредственные ощущения говорят о другом. Держать гирю на весу ненамного легче, чем поднимать её вверх, хотя механическая работа при этом, по-видимому, не совершается. Почему же одинаковые ощущения возникают в том и другом случае? Это объясняется тем, что мышцы, приводящие в движение руки или ноги (они называются поперечно-полосатыми или скелетными), способны к быстрым сокращениям, но каждое сокращение длится малое время. Сокращение мышцы вызывается сигналом, поступающим к ней по нервам от головного мозга. Если вы длительное время держите груз на весу, такие сигналы непрерывно друг за другом поступают к мышце. Когда приходит очередной сигнал, мышца сокращается, но

тут же сама по себе расслабляется впредь до получения следующего сигнала. В результате груз, который вы держите, испытывает малые колебания вверх и вниз. Рука дрожит, что особенно хорошо заметно, если держать тяжёлую гирю достаточно долго. Таким образом, скелетные мышцы не способны удерживать груз в строго определённом положении. При периодическом поднятии груза на малые расстояния работа будет совершаться. Поэтому рука устаёт не только когда вы поднимаете груз, но и когда держите его на весу.

Кроме поперечно-полосатых мышц, существуют так называемые гладкие мышцы. Ими снабжены, например, моллюски. Створки раковин закрываются такими мышцами. Гладкие мышцы после сокращения «замирают» и в дальнейшем никакой работы не совершают. Однако эти мышцы сокращаются очень медленно по сравнению с поперечно-полосатыми. Почему природа не создала быстродействующие гладкие мышцы, до сих пор не ясно.

Работа переменной силы на произвольном участке пути

В общем случае для вычисления работы переменной силы на произвольном участке пути нужно поступать следующим образом. Участок пути нужно разбить на очень малые участки $\Delta\vec{r}_i$, такие, что силу $\vec{F}_i$ на каждом отрезке перемещения можно считать постоянной по модулю и направлению (рис. 6.5). Тогда элементарная работа на малом участке равна

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i. \qquad (6.2.10)$$

Полная работа на конечном участке пути BC будет равна

$$A = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r}_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i. \qquad (6.2.11)$$

Здесь символ Σ означает суммирование произведений $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, а N — число малых участков, на которые разбит весь участок пути.

Графическое представление работы

Дадим наглядное графическое представление работы для случая, когда тело движется прямолинейно вдоль оси X (рис. 6.6). Для этого изобразим график зависимости проекции силы от координаты тела. Если сила постоянна, то гра-

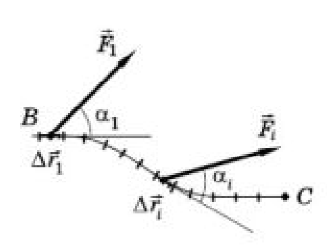


Рис. 6.5

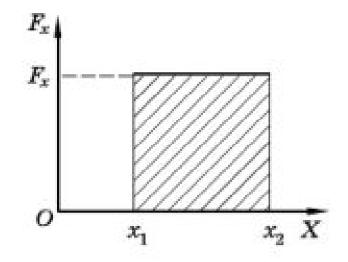


Рис. 6.6

фик будет представлять собой прямую, параллельную оси X (см. рис. 6.6). Работа

$$A = F\,|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = F_x\Delta x.$$

Очевидно, что площадь прямоугольника, заштрихованного на рисунке, численно равна работе при перемещении тела из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2.

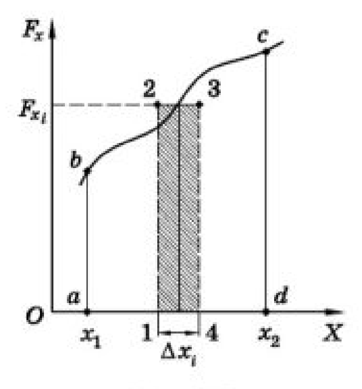


Рис. 6.7



Если при движении по прямой сила меняется от точки к точке траектории, то зависимость проекции F_x от положения тела на прямой изобразится некоторой кривой bc (рис. 6.7). Площадь, ограниченная этой кривой, осью X и отрезками ab и cd, равными проекциям сил в начальной и конечной точках пути, численно равна работе при перемещении тела из точки b в точку c. В самом деле, работа на малом участке пути Δx_i численно равна площади прямоугольника *1234*, так как $\Delta A = F_{xi}\Delta x_i$ (F_{xi} — значение проекции силы на этом участке). Полную же площадь фигуры можно рассматривать как сумму площадей таких элементарных прямоугольников. Согласно формуле (6.2.11), она равна искомой работе.

Единицы работы

Единицы работы можно установить с помощью основной формулы (6.2.1), определяющей работу. Если при перемещении тела на единицу длины на него действует сила, модуль которой равен единице, а направление совпадает с направлением перемещения ($\alpha = 0$), то и работа равна единице.

В Международной системе единиц (СИ) при $F = 1$ Н, $|\Delta\vec{r}| = 1$ м и $\alpha = 0°$ совершается работа

$$A = 1\ \text{Н} \cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{Н} \cdot \text{м},$$

которая и принимается за единицу работы. Она называется джоулем (сокращённо: Дж).

Итак, *джоуль — это работа, совершаемая силой* 1 Н *на перемещении* 1 м, *если направления силы и перемещения совпадают.*

Часто используют кратную единицу работы килоджоуль:

$$1\ \text{кДж} = 1000\ \text{Дж}.$$

В системе СГС за единицу работы принимают эрг:

$$1\ \text{эрг} = 1\ \text{дин} \cdot 1\ \text{см}.$$

Нетрудно установить соотношение между джоулем и эргом:

$$1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н} \cdot 1\ \text{м} = 10^5\ \text{дин} \cdot 100\ \text{см} = 10^7\ \text{эрг}.$$

Иногда применяется внесистемная единица работы килограмм-сила-метр:

$$1\ \text{кгс} \cdot \text{м} = 1\ \text{кгс} \cdot 1\ \text{м} = 9{,}8\ \text{Н} \cdot 1\ \text{м} = 9{,}8\ \text{Дж}.$$

Приведено определение работы силы $\vec{F}$ при перемещении тела на $\Delta\vec{r}$, составляющем угол α с направлением силы: $A = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha$.

? **1.** Работа силы — скалярная или векторная величина? Ответ аргументируйте.

2. Сформулируйте геометрический смысл работы.

3. Оцените, какую работу вы совершаете в течение дня.

§ 6.3. МОЩНОСТЬ

Очень часто важно знать не только работу, но и время, в течение которого она произведена. Поэтому надо ввести ещё одну величину — мощность.

Работа может быть совершена как за большой промежуток времени, так и за очень малый. На практике, однако, далеко не безразлично, быстро или медленно может быть произведена работа. Временем, в течение которого совершается работа, определяют производительность любого двигателя.

Очень большую работу может совершить и крошечный электромоторчик, но для этого понадобится много времени. Поэтому наряду с работой вводят величину, характеризующую быстроту, с которой она производится, — мощность.

Мощностью называют отношение работы A к интервалу времени Δt, за который эта работа совершена:

$$N = \frac{A}{\Delta t}. \quad (6.3.1)$$

Иными словами, мощность численно равна работе, совершённой в единицу времени.

Подставляя вместо работы A её выражение (6.2.2), получим

$$N = F\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}\cos\alpha = Fv\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{v}. \quad (6.3.2)$$

Таким образом, мощность равна произведению модуля вектора силы на модуль вектора скорости и на косинус угла между направлениями этих векторов, или скалярному произведению силы на скорость[1].

Мощность можно повысить как за счёт увеличения действующих сил, так и за счёт увеличения скорости движения.

В СИ мощность выражается в ваттах (Вт). Мощность равна 1 Вт, если работа 1 Дж совершается за 1 с.

Наряду с ваттом используются более крупные (кратные) единицы мощности:

1 гВт (гектоватт) = 100 Вт,

1 кВт (киловатт) = 1000 Вт,

1 МВт (мегаватт) = 1 000 000 Вт.

В системе СГС за единицу мощности принимается 1 эрг/с. Легко найти соотношение между единицами мощности 1 Вт и 1 эрг/с:

1 Вт = 1 Дж/с = 10^7 эрг/с.

До сих пор ещё в технике применяют иногда старую внесистемную единицу мощности — лошадиную силу (л. с.):

1 л. с. ≈ 735 Вт.

Мощности, развиваемые двигателями, колеблются в огромном диапазоне: от долей ватта до сотен и тысяч мегаватт (для двигателей космических ракет).

---

[1] Если интервал времени Δt стремится к нулю, то выражение (6.3.2) представляет собой мгновенную мощность, определяемую через мгновенную скорость.

Человек без особого напряжения может длительное время развивать мощность порядка 70 Вт. Мощность муравья составляет 10^{-5} Вт.

Мощность численно равна работе, совершаемой в единицу времени.

? 1. Почему при подъёме автомобиля в гору или при движении по песку шофёр включает первую передачу?
2. Как скорость движения автомобиля зависит от мощности двигателя, если силу сопротивления движению считать постоянной?
3. Как скорость движения автомобиля зависит от мощности двигателя, если сила сопротивления при больших скоростях прямо пропорциональна квадрату скорости?

§ 6.4. ЭНЕРГИЯ

Если система тел может совершить работу, то мы говорим, что она обладает энергией.

Для совершения работы необходимо, чтобы на движущееся тело всё время действовала та или иная сила. Тепловые двигатели обеспечивают действие силы до тех пор, пока не закончится топливо, а электродвигатель — до тех пор, пока к нему подводится ток. Однако эти двигатели представляют собой сложные системы и в механике не изучаются.

Рассмотрим простые системы движущихся тел, взаимодействующих друг с другом посредством сил тяготения и способных в той или иной мере деформироваться. (Пружина или резиновый шнур деформируются значительно, а камень, дерево, металл — столь мало, что их деформациями обычно можно пренебречь.) Будем считать, что никаких химических превращений тел не происходит и что в системе нет заряженных тел и электрических токов.

Тогда легко обнаружить, что поднятые над землёй грузы, а также устройства, имеющие сжатые пружины, способны действовать на движущееся тело и совершать работу лишь в течение определённого промежутка времени. Рано или поздно пружина распрямится, а груз опустится на землю и силы перестанут совершать работу.

Совершение работы не проходит для системы тел бесследно. Рассмотрим, например, часы с пружинным заводом. При заводе часов состояние системы (часового механизма)

меняется так, что она приобретает способность совершать работу в течение длительного времени. Пружина поддерживает движение всех колёс, стрелок и маятника, испытывающих сопротивление движению, вызванное трением. По мере хода часов способность пружины совершать работу постепенно исчерпывается. Состояние пружины меняется.

Подобным образом при совершении работы меняется состояние сжатого газа и скоростей движущихся тел.

Если тело или система тел могут совершать работу, то говорят, что они обладают энергией.

Совершая механическую работу, тело или система тел переходят из одного состояния в другое, в котором их энергия минимальна. Груз опускается, пружина распрямляется, движущееся тело останавливается. При совершении работы энергия постепенно расходуется. Для того чтобы система опять приобрела способность совершать работу, надо изменить её состояние: увеличить скорости тел, поднять тела вверх или деформировать. Для этого внешние силы должны совершить над системой положительную работу.

Энергия в механике — величина, определяемая состоянием системы — положением тел и их скоростями; изменение энергии при переходе системы из одного состояния в другое равно работе внешних сил.

? Покажите на примерах, что когда тела, способные совершать работу, действительно её совершают, их механическое состояние изменяется.

§ 6.5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ЕЁ ИЗМЕНЕНИЕ

В механике энергия системы тел определяется положением тел и их скоростями. Сначала найдём, как энергия тел зависит от их скоростей.

Вычислим работу силы $\vec{F}$, действующей на тело (материальную точку) массой m, в простом случае, когда тело движется прямолинейно, сила постоянна и её направление совпадает с направлением скорости. При перемещении тела на $\Delta\vec{r}$ его скорость меняется от значения $\vec{\upsilon}_1$ до значения $\vec{\upsilon}_2$. Выберем координатную ось X так, чтобы векторы $\vec{F}$, $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ и $\Delta\vec{r}$ были сонаправлены с этой осью (рис. 6.8). Тогда работа силы

$$A = \vec{F}\,|\Delta\vec{r}| = F\Delta x. \qquad (6.5.1)$$

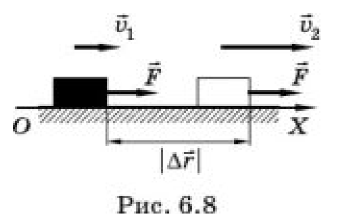


Рис. 6.8

Согласно кинематической формуле (1.20.8), перемещение тела при движении с постоянным ускорением равно

$$\Delta x = \frac{\upsilon_x^2 - \upsilon_{0x}^2}{2a_x}.$$

В нашем случае $\upsilon_x = \upsilon_2$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_1$, $a_x = a$.
Поэтому выражение для работы (6.5.1) примет вид

$$A = F\frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2a}. \qquad (6.5.2)$$

Согласно второму закону Ньютона $\frac{F}{a} = m$. Следовательно,

$$A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \qquad (6.5.3)$$

Величину, равную половине произведения массы тела на квадрат его скорости, называют кинетической[1] энергией.

Обозначим кинетическую энергию через E_k:

$$\boxed{E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}.} \qquad (6.5.4)$$

Любое движущееся тело обладает энергией, пропорциональной его массе и квадрату скорости.

Учитывая определение кинетической энергии (6.5.4), выражение (6.5.3) для работы можно переписать так:

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k. \qquad (6.5.5)$$

Равенство (6.5.5) выражает теорему об изменении кинетической энергии: **изменение кинетической энергии тела (точнее, материальной точки) за некоторый промежуток времени равно работе, совершённой за это время силой, действующей на тело.**

Кинетическая энергия увеличивается, если работа положительна, и уменьшается при отрицательной работе.

Можно доказать, что теорема (6.5.5) справедлива и в тех случаях, когда на тело действует переменная сила и оно движется по криволинейной траектории.

---

[1] От греческого слова kinetikos — «приводящий в движение».

Кинетическая энергия выражается в тех же единицах, что и работа, т. е. в джоулях.

Так как кинетическая энергия отдельного тела определяется его массой и скоростью, то она не зависит от того, взаимодействует это тело с другими телами или нет. Значение кинетической энергии зависит от системы отсчёта, как и значение скорости. Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий отдельных тел, входящих в эту систему.

Существенно, что при доказательстве теоремы об изменении кинетической энергии мы использовали лишь определение работы и второй закон Ньютона. Никаких предположений о характере сил взаимодействия между телами не было сделано. Это могли быть силы тяготения, силы упругости или силы трения.

Движущееся тело обладает кинетической энергией. Эта энергия равна работе, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость тела от нуля до значения v.

§ 6.6. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Вычислим работу, используя не второй закон Ньютона, а выражение сил взаимодействия между телами в зависимости от расстояний между ними. Это позволит нам ввести понятие потенциальной энергии, зависящей не от скоростей тел, а от расстояний между телами (или от расстояний между частями одного и того же тела). Так как силы могут быть самыми разнообразными, то нужно рассмотреть различные случаи. Мы ограничимся наиболее простыми.

Потенциальная энергия взаимодействия тела и Земли

Рассмотрим вначале работу внутренних сил системы, состоящей из земного шара и поднятого над поверхностью Земли тела, например камня. При небольших расстояниях от поверхности Земли эту силу можно считать постоянной и равной

$$\vec{F} = m\vec{g}. \qquad (6.6.1)$$

Сила, действующая на камень, направлена вертикально вниз. Вычислим работу этой силы при перемещении камня

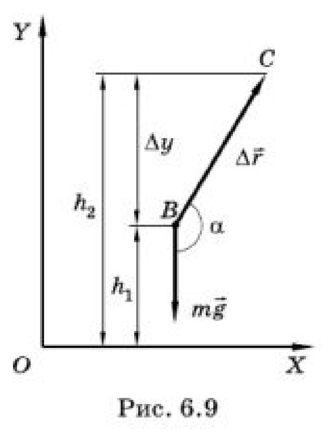


Рис. 6.9

вверх вдоль прямой BC (рис. 6.9). Начальная точка B находится на высоте h_1 над Землёй, а конечная точка C — на высоте h_2. Ось Y направим вертикально вверх, а ось X — вдоль поверхности Земли. Работа

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = mg|\Delta\vec{r}|\cos\alpha =$$
$$= -mg|\Delta\vec{r}|\cos(180° - \alpha) = -mg\Delta y.$$

Так как $\Delta y = h_2 - h_1$ (см. рис. 6.9), то

$$A = -(mgh_2 - mgh_1). \quad (6.6.2)$$

При движении камня вверх сила тяжести совершает отрицательную работу. Если бы камень двигался вниз, то работа была бы положительной.

Работой силы, действующей на Землю со стороны камня, можно пренебречь, так как перемещение Земли ничтожно мало из-за её огромной массы[1].

Итак, работу силы тяжести можно представить в виде разности двух значений величины, зависящей от взаимного расположения тела и Земли.

Величину, равную произведению массы m тела на ускорение свободного падения g и высоту h тела над поверхностью Земли, называют потенциальной[2] энергией взаимодействия тела и Земли. Обозначим потенциальную энергию через E_p:

$$\boxed{E_p = mgh.} \quad (6.6.3)$$

С учётом (6.6.3) выражение для работы (6.6.2) запишется так:

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p. \quad (6.6.4)$$

Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком.

---

[1] Разумеется, это справедливо в системе отсчёта, которая не перемещается вдоль оси Y.

[2] От латинского слова potentia — «возможность».

Когда сила тяжести совершает отрицательную работу, то потенциальная энергия увеличивается: $E_{p2} > E_{p1}$. При совершении положительной работы потенциальная энергия, напротив, уменьшается:

$$E_{p2} < E_{p1}.$$

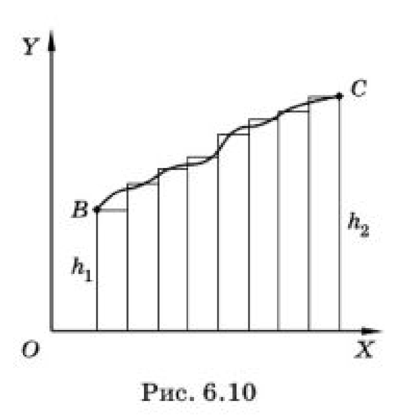


Рис. 6.10

Из выражения (6.6.2) видно, что работа силы тяжести определяется лишь изменением высоты $h_2 - h_1$ тела над поверхностью Земли, но не зависит от перемещения его в горизонтальном направлении. Это справедливо не только для работы при перемещении тела вдоль прямой, но и для работы на произвольном участке пути. В самом деле, если тело перемещается вдоль кривой BC из точки, находящейся над землёй на высоте h_1, в точку, лежащую на высоте h_2 (рис. 6.10), то работа вдоль этой кривой равна работе вдоль ступенчатой линии, состоящей из вертикальных и горизонтальных отрезков малой длины. На горизонтальных отрезках работа равна нулю, а сумма работ на вертикальных отрезках равна работе на вертикальной прямой длиной $h_2 - h_1$. Поэтому работа по-прежнему будет выражаться формулой (6.6.2).

Следовательно, **работа силы тяжести не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела**. На замкнутой траектории работа равна нулю, так как изменение потенциальной энергии при этом равно нулю.

Именно *независимость работы силы тяжести от формы траектории, по которой перемещается тело, позволяет ввести понятие потенциальной энергии.*

Работа силы упругости

Вычислим работу, которую совершает растянутая пружина при перемещении прикреплённого к ней тела.

На рисунке 6.11, *а* показана пружина, у которой один конец закреплён неподвижно, а к другому концу прикреплён шар. Если пружина растянута (рис. 6.11, *б*), то она действует на шар с силой $\vec{F}_1$, направленной к положению равновесия шара, в котором пружина не деформирована.

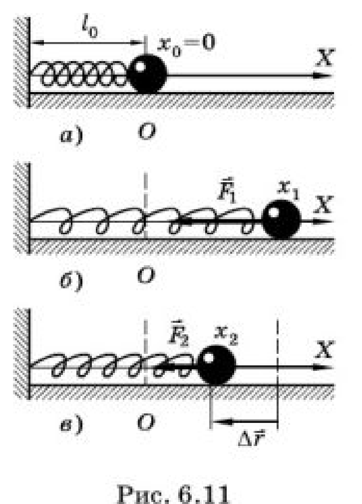


Рис. 6.11

Начало отсчёта оси X совместим с концом пружины в нерастянутом состоянии.

Вычислим работу силы упругости при перемещении шара из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2. Из рисунка 6.11, *в* видно, что модуль перемещения $|\Delta\vec{r}| = x_1 - x_2$.

При деформации пружины сила упругости изменяется линейно с изменением координаты: $F = k|x|$. Для вычисления работы воспользуемся графиком зависимости силы от координаты шара (рис. 6.12). Как было показано в § 6.2, работу силы упругости при перемещении $|\Delta\vec{r}| = x_1 - x_2$ можно считать численно равной площади трапеции $BCDM$. Обозначив через F_1 модуль силы упругости в начальном положении шара, а через F_2 — в конечном, получим

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2}(x_1 - x_2) = \frac{F_1 + F_2}{2}|\Delta\vec{r}|. \qquad (6.6.5)$$

Величину $\frac{F_1 + F_2}{2}$ можно рассматривать как среднее значение силы, действующей на шар. При линейной зависимости силы от расстояния это среднее значение равно полусумме начального и конечного значений силы.

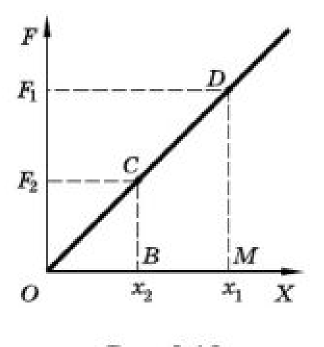


Рис. 6.12

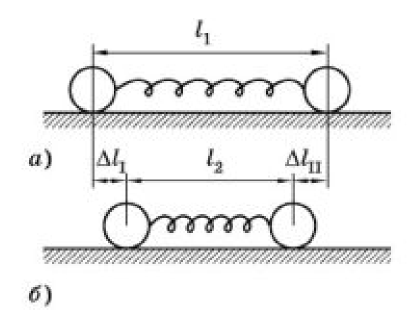


Рис. 6.13

Теперь рассмотрим два тела, соединённых пружиной и лежащих на гладкой горизонтальной поверхности. Будем считать для простоты, что тела могут перемещаться только вдоль прямой, совпадающей с осью пружины. Модули сил, с которыми взаимодействуют тела, равны

$$F = k(l - l_0) = k\Delta l, \qquad (6.6.6)$$

где l — расстояние между телами, а l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии.

Пусть в начальном положении длина пружины равна l_1 (рис. 6.13, *а*), а в конечном l_2 (рис. 6.13, *б*) ($l_1 > l_2$). При сокращении пружины на $\Delta l = l_1 - l_2$ первое тело переместится на расстояние Δl_{I}, а второе — на расстояние Δl_{II} (см. рис. 6.13, *б*), так что

$$\Delta l = \Delta l_{\text{I}} + \Delta l_{\text{II}}.$$

Согласно формуле (6.6.5), работа силы упругости по перемещению первого тела равна

$$A_1 = \frac{F_1 + F_2}{2}\Delta l_{\text{I}} = \frac{k}{2}[(l_1 - l_0) + (l_2 - l_0)]\Delta l_{\text{I}}.$$

Аналогично работа по перемещению второго тела

$$A_2 = \frac{F_1 + F_2}{2}\Delta l_{\text{II}} = \frac{k}{2}[(l_1 - l_0) + (l_2 - l_0)]\Delta l_{\text{II}}.$$

Учитывая, что $\Delta l_{\text{I}} + \Delta l_{\text{II}} = l_1 - l_2$, приходим к выводу: полная работа внутренних сил системы (сил упругости в данном случае) равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{k}{2}[(l_1 - l_0) + (l_2 - l_0)](l_1 - l_2). \qquad (6.6.7)$$

Выражение (6.6.7) нетрудно преобразовать к виду

$$A = \frac{k(\Delta l_1)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_2)^2}{2}, \qquad (6.6.8)$$

где $\Delta l_1 = l_1 - l_0$, а $\Delta l_2 = l_2 - l_0$ — деформация пружины в начальном и конечном состояниях[1].

---

[1] Это легко проверить, если произвести все действия в формулах (6.6.7) и (6.6.8) и сравнить результаты.

Потенциальная энергия деформированной пружины

Формула (6.6.8) показывает, что работа силы упругости может быть представлена как изменение величины

$$E_p = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \qquad (6.6.9)$$

взятое с противоположным знаком.

При сжатии (или растяжении) пружины

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\left(\frac{k(\Delta l_2)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2}\right). \qquad (6.6.10)$$

Величина E_p в формуле (6.6.9) представляет собой потенциальную энергию тел, взаимодействующих посредством пружины.

Работа сил упругости зависит только от деформации пружины, определяемой начальной и конечной длиной пружины. От формы траектории тел, на которые действует пружина, работа A не зависит, подобно тому как не зависит от формы пути работа сил тяжести. Ведь при перемещении любого тела перпендикулярно оси пружины, когда её длина не меняется, работа будет равна нулю, так как при этом сила перпендикулярна перемещению. Работа определяется разностью значений потенциальной энергии в начальном и конечном состояниях.

Заметим, что потенциальная энергия, определяемая выражением (6.6.9), не зависит от свойств тел, которые связывает пружина. Эту энергию следует считать сконцентрированной в пружине.

Консервативные силы

Мы показали, что работа силы тяжести вблизи поверхности Земли и работа сил упругости растянутой пружины не зависят от формы траектории и могут быть представлены как изменения зависящей от координат величины — потенциальной энергии, взятые с противоположным знаком.

Этот результат оказывается справедливым не только для рассмотренных нами сил, но и для любых сил, зависящих от расстояний между телами, но не зависящих от их скоростей. Как мы скоро увидим, механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, сохраняется в замкнутой системе лишь в том случае, когда в ней действуют силы, зависящие только от расстояния. Такие силы называ-

ются консервативными, т. е. сохраняющимися (вспомните: консервы). Системы, в которых действуют только эти силы, также называют консервативными.

Работа консервативных сил всегда может быть представлена как приращение потенциальной энергии, взятое с противоположным знаком:

$$\boxed{A = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}).} \qquad (6.6.11)$$

Потенциальная энергия тел, взаимодействующих посредством гравитационных сил

Возможные формы потенциальной энергии не исчерпываются выражениями (6.6.3) и (6.6.9). Так, потенциальная энергия двух тел, взаимодействующих друг с другом посредством сил всемирного тяготения, в общем случае записывается так:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \qquad (6.6.12)$$

где G — гравитационная постоянная.

Чтобы обосновать справедливость формулы (6.6.12), решим обратную задачу. Докажем, что, взяв потенциальную энергию в виде (6.6.12), мы получим для силы взаимодействия точечных тел закон всемирного тяготения Ньютона.

Вычислим, используя формулу (6.6.12), работу по перемещению на малое расстояние $|\Delta\vec{r}| = r_2 - r_1$ точечного тела массой m_1, взаимодействующего с неподвижным точечным телом массой m_2 (рис. 6.14). Если $|\Delta\vec{r}|$ мало, то силу $\vec{F}$ взаимодействия тел массами m_1 и m_2 можно считать постоянной. Работа в этом случае равна

$$A = -F|\Delta\vec{r}| = -(E_{p2} - E_{p1}),$$

так как сила и перемещение направлены в противоположные стороны.

Подставляя в эту формулу значение потенциальной энергии (6.6.12), получим

$$-F|\Delta\vec{r}| = G\frac{m_1 m_2}{r_2} - G\frac{m_1 m_2}{r_1} = -Gm_1 m_2\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

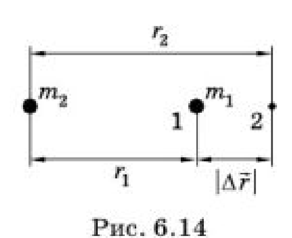


Рис. 6.14

Если $|\Delta\vec{r}| \ll r_1$ и $|\Delta\vec{r}| \ll r_2$, то $r_1 r_2 \approx r^2$.
Тогда

$$F|\Delta\vec{r}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}|\Delta\vec{r}|.$$

Отсюда

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Допустив, что потенциальная энергия имеет форму (6.6.12), мы пришли к правильному выражению для силы всемирного тяготения.

Можно показать, что выражение для потенциальной энергии $E_p = mgh$ представляет собой частный случай формулы (6.6.12), когда изменение высоты h тела над поверхностью Земли много меньше её радиуса R.

В самом деле, пусть начальная высота тела массой m над поверхностью Земли равна h_1, а конечная — h_2. Тогда, согласно формулам (6.6.11) и (6.6.12), будем иметь

$$\Delta E_p = -G\frac{Mm}{R + h_2} - G\frac{Mm}{R + h_1} = GMm\frac{h_2 - h_1}{(R + h_1)(R + h_2)}.$$

Так как $R \gg h_1$ и $R \gg h_2$, то приближённо

$$\Delta E_p = G\frac{Mm}{R^2}(h_2 - h_1).$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = G$——. Поэтому

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1$$

и, следовательно, $E_p = mgh$.

Работа сил, зависящих только от расстояний между телами системы (но не от их скоростей), не зависит от формы траектории. Поэтому работу можно представить как разность значений некоторой функции, называемой потенциальной энергией, в конечном и начальном состояниях системы. Значение потенциальной энергии зависит от характера действующих сил.

§ 6.7. ЗАМЕЧАНИЯ О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

В этом параграфе никакие новые сведения не сообщаются, но подчёркиваются и разъясняются некоторые важные особенности потенциальной энергии, на которые следует обратить внимание.

Потенциальная энергия — энергия взаимодействия тел

Важно отчётливо представлять себе, что кинетическая энергия — величина, относящаяся к одному телу, а потенциальная энергия — это всегда энергия взаимодействия по меньшей мере двух тел (или частей одного тела) друг с другом. Понятие потенциальной энергии относится к системе тел, а не к одному телу. Если в системе имеется несколько тел, то полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех пар взаимодействующих тел (любое тело взаимодействует с каждым из остальных).

Потенциальная энергия характеризует взаимодействие тел именно потому, что само понятие силы всегда относится к двум телам: к телу, на которое действует сила, и к телу, со стороны которого она действует.

При получении выражения для кинетической энергии мы не использовали эту особенность силы, сразу заменив её в формуле для работы произведением массы на ускорение согласно второму закону Ньютона. Именно поэтому понятие кинетической энергии относится к одному телу.

Выражение же для потенциальной энергии мы получили с помощью известной зависимости сил от расположения взаимодействующих тел, не используя уравнения движения. Равенство $A = -\Delta E_p$ определяет потенциальную энергию безотносительно к уравнениям движения. Поэтому потенциальная энергия является просто другой характеристикой (наряду с силой) взаимного действия тел друг на друга.

Часто при выводе формулы, связывающей изменение потенциальной энергии с работой сил, одно из тел системы принимают за неподвижное. Так, когда рассматривают падение тела на Землю под действием силы тяжести, то смещением Земли при этом пренебрегают. Поэтому работа сил взаимодействия между Землёй и телом сводится к работе только одной силы, действующей на тело.

Или другой пример. Сжатая или растянутая пружина, действующая на тело, обычно закреплена одним концом,

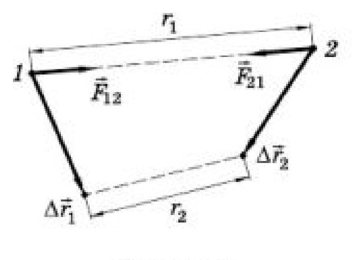


Рис. 6.15

и этот конец пружины не перемещается (фактически он скреплён с земным шаром). Работу совершает при этом лишь сила упругости деформированной пружины, приложенная к телу.

Из-за этого потенциальную энергию системы двух тел привыкают рассматривать как энергию одного тела. Это может привести к путанице.

В действительности во всех случаях справедливо следующее утверждение: изменение потенциальной энергии двух тел, взаимодействующих с силами, зависящими только от расстояния между телами, равно работе этих сил, взятой со знаком «минус»:

$$A = \vec{F}_{12} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta\vec{r}_2 = -[E_p(r_2) - E_p(r_1)] = -\Delta E_p. \qquad (6.7.1)$$

Здесь $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на тело *1* со стороны тела *2*, а $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на тело *2* со стороны тела *1* (рис. 6.15).

Нулевой уровень потенциальной энергии

Согласно уравнению (6.7.1), работа сил взаимодействия определяет не саму потенциальную энергию, а её изменение.

Поскольку работа определяет лишь изменение потенциальной энергии, то только изменение энергии в механике имеет физический смысл. Поэтому можно произвольно выбрать состояние системы, в котором её потенциальная энергия считается равной нулю. Этому состоянию соответствует нулевой уровень потенциальной энергии. Ни одно явление в природе или технике не определяется значением самой потенциальной энергии. Важна лишь разность значений потенциальной энергии в конечном и начальном состояниях системы тел.

Выбор нулевого уровня производится по-разному и диктуется исключительно соображениями удобства, т. е. простотой записи уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Обычно в качестве состояния с нулевой потенциальной энергией выбирают состояние системы с минимальной энергией. Тогда потенциальная энергия всегда положительна.

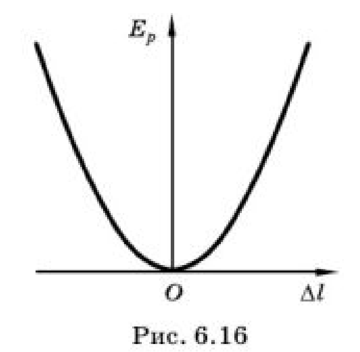


Рис. 6.16

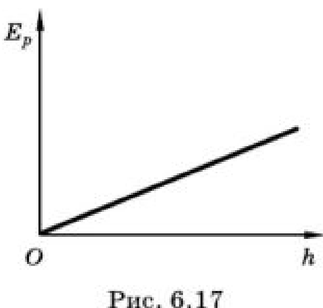


Рис. 6.17

У пружины потенциальная энергия минимальна в отсутствие деформации, а у камня — когда он лежит на поверхности Земли. Поэтому в первом случае $E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ (рис. 6.16), а во втором случае $E_p = mgh$ (рис. 6.17). Но к данным выражениям можно добавить любую постоянную величину C, и это ничего не изменит. Можно считать, что $E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + C$ и $E_p = mgh + C$.

Если во втором случае положить $C = -mgh_0$, то это будет означать, что за нулевой уровень энергии принята энергия на высоте h_0 над поверхностью Земли.

Иногда невозможно выбрать нулевой уровень потенциальной энергии так, чтобы минимальная энергия равнялась нулю. Так, например, потенциальную энергию двух тел, взаимодействующих посредством сил всемирного тяготения, можно записать так:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C.$$

При $r \to 0$ первое слагаемое стремится к $-\infty$. Поэтому минимальное значение энергии можно считать равным нулю лишь при $C = \infty$. Но пользоваться уравнениями, в которые входит бесконечная величина, разумеется, нельзя. Поэтому здесь удобнее положить $C = 0$ и тем самым за нулевой уровень принять потенциальную энергию в состоянии, когда тела бесконечно удалены друг от друга ($r = \infty$). Тогда нулевому уровню будет соответствовать не ми-

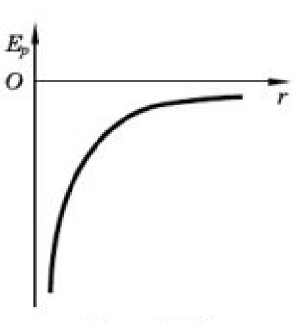


Рис. 6.18

нимальная энергия, а максимальная. При любом конечном значении r потенциальная энергия отрицательна (рис. 6.18).

Независимость потенциальной энергии от выбора системы отсчёта

Заметим ещё раз, что понятие потенциальной энергии имеет смысл для таких систем, в которых силы взаимодействия консервативны, т. е. зависят лишь от расстояния между телами или их частями. Соответственно и потенциальная энергия зависит от расстояния между телами или их частями: от высоты камня над поверхностью Земли, от длины пружины, от расстояния между точечными телами. От координат тел потенциальная энергия непосредственно не зависит. (Лишь постольку, поскольку расстояния являются функциями координат, можно говорить о зависимости от координат.) Отсюда следует очень важный вывод, на который обычно не обращают внимания. Так как расстояния во всех системах отсчёта, движущихся и неподвижных, одни и те же, потенциальная энергия не зависит от выбора системы отсчёта[1].

Но как же это может быть? Ведь $\Delta E_p = -A$, а работа зависит от выбора системы отсчёта. Вот здесь-то и проявляется отчётливо тот факт, что потенциальная энергия есть энергия взаимодействия двух тел, а её изменение определяется работой сил, действующих на оба тела. При переходе от неподвижной системы к движущейся меняются работы обеих сил, но суммарная работа остаётся неизменной. В самом деле, если в некоторой системе отсчёта за время Δt совершается работа

$$A_1 = \vec{F}_{12} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta\vec{r}_2,$$

то в другой системе, движущейся относительно первой, работа равна

$$A_2 = \vec{F}_{12} \cdot (\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_0) + \vec{F}_{21} \cdot (\Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_0),$$

где $\Delta\vec{r}_0$ — перемещение систем отсчёта друг относительно друга за время Δt.

---

[1] Потенциальная энергия зависит от выбора нулевого уровня потенциальной энергии, а это совсем другое, чем зависимость от выбора системы отсчёта.

Так как по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, то

$$\vec{F}_{12} \cdot \Delta\vec{r}_0 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta\vec{r}_0 = 0.$$

Следовательно, $A_1 = A_2$.

Различия между потенциальной и кинетической энергией

Кинетическая энергия зависит только от скоростей тел, а потенциальная — только от расстояний между ними.

Далее, положительная работа внутренних сил всегда приводит к увеличению кинетической энергии, но обязательно уменьшает энергию потенциальную:

$$\Delta E_k = A, \text{ но } \Delta E_p = -A.$$

Кинетическая энергия всегда положительна, а потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной.

Изменение кинетической энергии всегда равно работе действующих на тело сил, а изменение потенциальной энергии равно (со знаком «минус») работе только консервативных сил (но не сил трения, зависящих от скорости).

И потенциальная, и кинетическая энергии являются функциями состояния системы, т. е. они точно определены, если известны координаты и скорости всех тел системы.

? Выделите общее и различия между потенциальной и кинетической энергией.

§ 6.8. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ

В замкнутой системе тел положительная работа внутренних сил увеличивает кинетическую энергию и уменьшает потенциальную. Отрицательная работа, напротив, увеличивает потенциальную энергию и уменьшает кинетическую. Именно благодаря этому выполняется закон сохранения энергии.

Снова обратимся к уже рассматривавшейся простой системе тел, состоящей из земного шара и поднятого над поверхностью Земли тела, например камня.

Под действием силы тяжести камень падает вниз. Силу сопротивления воздуха учитывать не будем. Работа, совершаемая силой тяжести при перемещении камня из одной точки в другую, равна изменению (увеличению) кинетической энергии камня:

$$A = \Delta E_k. \qquad (6.8.1)$$

В то же время эта работа равна уменьшению потенциальной энергии:

$$A = -\Delta E_p. \qquad (6.8.2)$$

Так как в выражениях (6.8.1) и (6.8.2) левые части одинаковы, то равны между собой и правые части:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \qquad (6.8.3)$$

Равенство (6.8.3) означает, что увеличение кинетической энергии системы равно убыли её потенциальной энергии (или наоборот). Отсюда вытекает, что

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0,$$

или

$$\Delta(E_k + E_p) = 0. \qquad (6.8.4)$$

Изменение суммы кинетической и потенциальной энергий равно нулю.

Величину E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий системы, называют механической энергией системы:

$$E = E_k + E_p. \qquad (6.8.5)$$

Так как изменение полной энергии, согласно (6.8.4), равно нулю, то энергия остаётся постоянной:

$$\boxed{E = E_k + E_p = \text{const.}} \qquad (6.8.6)$$

Таким образом, **в замкнутой системе, в которой действуют консервативные силы, механическая энергия сохраняется.** В этом состоит закон сохранения энергии. Энергия не создаётся и не уничтожается, а только превращается из одной формы в другую: из кинетической в потенциальную или наоборот.

Учитывая, что в рассматриваемом конкретном случае $E_k = \frac{mv^2}{2}$ и $E_p = mgh$, можно закон сохранения энергии записать так:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const},$$

или

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \qquad (6.8.7)$$

Это уравнение позволяет очень просто находить скорость камня v_2 на любой высоте h_2 над Землёй, если известна начальная скорость v_1 камня на исходной высоте h_1.

Закон сохранения энергии (6.8.6) обобщается для любого числа тел и любых консервативных сил взаимодействия между ними. Под E_k нужно понимать сумму кинетических энергий всех тел, а под E_p — полную потенциальную энергию системы.

Для системы, состоящей из двух тел массами m_1 и m_2 и пружины (см. рис. 6.13), закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \text{const}. \qquad (6.8.8)$$

Полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий. В замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется.

§ 6.9. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ СИЛ

Докажем, что в рассматриваемой системе изменение энергии равно работе внешних сил.

Пусть рассмотренная нами система из двух тел — Земли и камня — незамкнута. На камень действует внешняя сила $\vec{F}$. Происхождение этой силы не имеет значения. Это может быть, в частности, сила упругости привязанной к камню верёвки (рис. 6.19). Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}. \qquad (6.9.1)$$

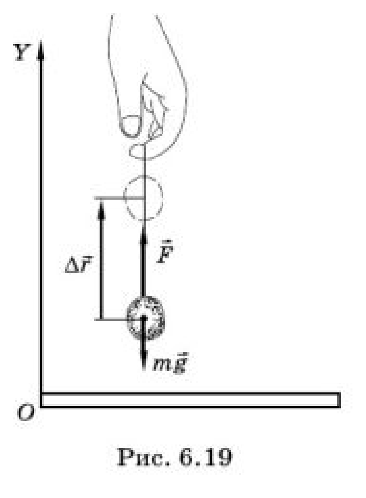


Рис. 6.19

За некоторый промежуток времени камень совершит перемещение $\Delta\vec{r}$, направленное вверх. Умножая обе части уравнения (6.9.1) скалярно на $\Delta\vec{r}$, получим:

$$m\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} + m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r},$$

или

$$m\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} - m\vec{g}\cdot\Delta\vec{r} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}. \quad (6.9.2)$$

Первое слагаемое слева есть изменение кинетической энергии камня. Действительно, при совпадении направлений векторов $\vec{a}$ и $\Delta\vec{r}$ получим (см. § 6.5):

$$m\vec{a}\cdot\Delta\vec{r} = ma|\Delta\vec{r}| = ma\frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2a} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \Delta E_k.$$

Второе слагаемое уравнения (6.9.2) есть изменение потенциальной энергии: $\Delta E_p = -mg|\Delta\vec{r}|$. Обратите внимание: изменение потенциальной энергии системы равно работе только внутренних сил взаимодействия системы Земля — камень, но не работе внешних сил. Работа внешней силы определяется правой частью уравнения (6.9.2).

Поэтому равенство (6.9.2) можно записать так:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E = A_{\text{вн}}, \quad (6.9.3)$$

где $E = E_k + E_p$.

Изменение полной механической энергии равно работе внешних сил.

Полученный вывод имеет общий характер. Можно показать, что он справедлив для любого числа тел, взаимодействующих посредством консервативных сил.

Внешние силы не меняют потенциальную энергию системы

Подробное рассмотрение частного случая (системы Земля — камень) показывает, что внешние силы изменяют (совместно с работой внутренних сил) лишь кинетическую энергию системы. Потенциальную энергию системы они непосредственно не меняют. Изменение потенциальной энергии системы всегда определяется работой внутренних сил.

Этот вывод имеет общее значение. Конечно, внешние силы изменяют расположение тел системы, и за счёт этого меняется потенциальная энергия системы. Но если бы в системе не действовали консервативные силы, то потенциальная энергия не менялась бы.

Работа системы над внешними телами

Работа силы, действующей на тело (см. формулу (6.2.1)), определяется силой и перемещением тела. Но рассматриваемое тело, согласно третьему закону Ньютона, действует на другое тело (или тела), и при этом тоже может совершаться работа. Однако вычислить эту работу мы не можем, так как не знаем перемещения других тел.

Нередко встречающееся утверждение о том, что работа внешних сил над системой равна работе A' сил системы над внешними телами с противоположным знаком

$$A_{вн} = -A', \tag{6.9.4}$$

не может быть верным во всех случаях.

Так будет лишь при условии, что тела рассматриваемой системы и внешние тела совершают одинаковые перемещения. А это имеет место далеко не всегда. Силы по третьему закону Ньютона обязательно равны по модулю и противоположны по направлению, но перемещения не обязательно должны быть равными.

В качестве примера рассмотрим две простейшие системы: земной шар (первая система) и падающий на него камень (вторая система)[1]. Тогда силы тяготения и для Земли, и для камня будут считаться внешними силами. Сила тяжести, приложенная к камню, совершит работу $A_{вн} = mgh$, а сила, приложенная к Земле, никакой работы не совершит, так как земной шар не смещается (рис. 6.20): $A' = 0$.

Иное дело, если камень поднимают, например, рукой (рис. 6.21). Тогда работа внешней силы $\vec{F}_1$, приложенной к камню, равна и противоположна по знаку работе силы $\vec{F}_2$, приложенной к руке со стороны камня.

Точно так же работа, которую совершает двигатель, связанный ремённой передачей со станком, равна по абсолютному значению и противоположна по знаку работе, совершаемой станком над двигателем.

---

[1] Мы можем любую группу тел или одно тело считать рассматриваемой системой. Это вопрос удобства.

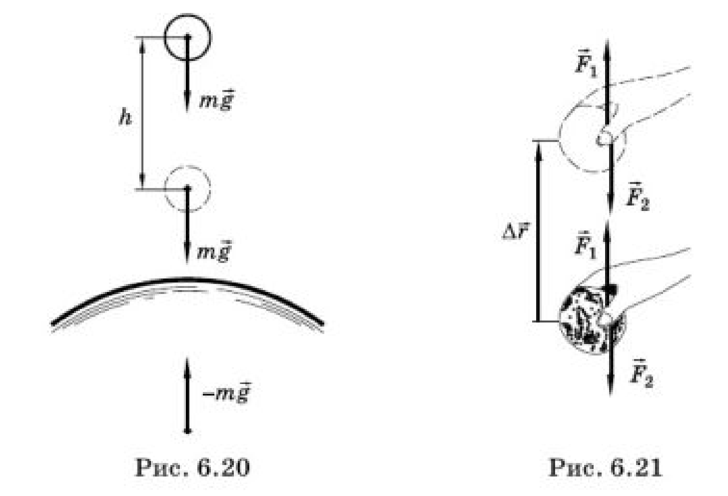


Рис. 6.20　　　　Рис. 6.21

Работа внешних сил меняет кинетическую, а значит, и полную энергию системы. Потенциальная энергия системы меняется только за счёт работы внутренних сил.

? ° Камень массой m падает на землю с высоты h без начальной скорости. Рассмотрим движение камня с точки зрения инерциальной системы отсчёта, которая движется вниз с постоянной скоростью $v = \sqrt{2gh}$. В этой системе отсчёта начальная скорость камня равна v, а конечная скорость равна нулю. Значит, кинетическая энергия камня уменьшается от $E_{k1} = \frac{mv^2}{2}$ до $E_{k2} = 0$. Как объяснить уменьшение кинетической энергии в этой системе отсчёта?

§ 6.10. СТОЛКНОВЕНИЕ УПРУГИХ ШАРОВ

Применим закон сохранения энергии для нахождения скорости двух шаров после центрального абсолютно упругого удара.

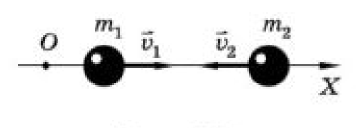


Рис. 6.22

Под абсолютно упругим ударом понимают такой удар, при котором механическая энергия сохраняется[1]. Если начальные скорости шаров направлены по ли-

[1] Для этого необходимо, чтобы силы взаимодействия между телами зависели только от деформаций, но не от скоростей их движения друг относительно друга.

нии, соединяющей их центры (рис. 6.22), то удар называют центральным.

Для абсолютно неупругого удара скорости шаров после удара можно найти с помощью закона сохранения импульса (см. гл. 5). При упругом ударе этого закона недостаточно, так как шары после удара будут иметь различные скорости. Значит, нужно ещё одно уравнение, которое даёт закон сохранения энергии.

Обозначим массы шаров через m_1 и m_2, их скорости до удара через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а после удара через $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Закон сохранения импульса в проекциях на ось X будет иметь следующий вид:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}. \qquad (6.10.1)$$

Закон сохранения энергии запишется так:

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2x}^2}{2}. \qquad (6.10.2)$$

Нами получена система двух уравнений с двумя неизвестными u_{1x} и u_{2x}. Для решения этой системы её удобно переписать так:

$$m_1(u_{1x} - v_{1x}) = m_2(v_{2x} - u_{2x}), \qquad (6.10.3)$$

$$m_1(u_{1x}^2 - v_{1x}^2) = m_2(v_{2x}^2 - u_{2x}^2). \qquad (6.10.4)$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$u_{1x} + v_{1x} = u_{2x} + v_{2x}. \qquad (6.10.5)$$

Умножив обе части этого уравнения на m_2 и сложив полученный результат почленно с уравнением (6.10.3), приходим к выражению

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10.6)$$

Применив аналогичный приём, получим выражение для проекции скорости $\vec{u}_2$:

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10.7)$$

Применим эти формулы для двух частных случаев.

1. Второй шар до удара покоился ($v_{2x} = 0$), тогда

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}, \; u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10.8)$$

При $m_1 > m_2$ первый шар продолжает двигаться в том же направлении, что и до удара, но с меньшей скоростью. Если

$m_1 < m_2$, то первый шар отскакивает после удара назад. Второй шар в обоих случаях будет двигаться в ту же сторону, куда двигался до удара первый шар.

2. Оба шара имеют одинаковую массу, тогда

$$u_{1x} = \frac{2mv_{2x}}{2m} = v_{2x}, \; u_{2x} = \frac{2mv_{1x}}{2m} = v_{1x}.$$

Шары при соударении обмениваются скоростями. Проверьте на опыте справедливость этих выводов.

Рассмотрено центральное столкновение абсолютно упругих шаров. Полученные формулы справедливы не только для столкновения макроскопических тел, но и в широких пределах для атомов и элементарных частиц.

§ 6.11. УМЕНЬШЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТРЕНИЯ

До сих пор мы избегали говорить о работе сил трения. Сейчас мы увидим, как влияет работа сил трения на изменение механической энергии.

Если в замкнутой системе силы трения совершают работу при движении тел друг относительно друга, то механическая энергия не сохраняется. В этом легко убедиться, толкнув книгу, лежащую на горизонтальном столе. Из-за действия силы трения книга почти сразу остановится. Сообщённая ей механическая энергия исчезнет. Сила трения совершает отрицательную работу и уменьшает кинетическую энергию. Но потенциальная энергия тела при этом не увеличивается. Поэтому полная механическая энергия убывает. Кинетическая энергия не превращается в потенциальную.

Силы трения неконсервативны

Причина особой роли сил трения состоит в том, что работа этих сил не связана с изменением (уменьшением или увеличением) потенциальной энергии системы. Силы трения зависят не от расстояний между телами, а от их скоростей. Поэтому работа сил трения не связана определённым образом с изменением расположения тел.

Отличие сил трения от консервативных сил становится особенно наглядным, если рассмотреть работу тех и других на замкнутом пути. Работа силы тяжести, например, на замкнутом пути всегда равна нулю. Она положительна при паде-

нии тела с высоты h и отрицательна при подъёме на ту же высоту. Работа же силы сопротивления воздуха отрицательна как при подъёме тела вверх, так и при движении его вниз. Поэтому на замкнутом пути она обязательно меньше нуля.

Когда медленно передвигают стол из одного угла комнаты в другой, а затем снова возвращают его на место, совершают положительную работу, отличную от нуля. Эта работа как раз равна по модулю отрицательной работе сил трения, действующих на ножки стола со стороны пола на замкнутом пути. Соответственно работа сил трения зависит от формы траектории и не определяется лишь начальным и конечным положениями тела. Силы трения неконсервативны.

Действие сил трения в замкнутой системе

Отрицательная работа сил трения уменьшает кинетическую энергию тел, как и отрицательная работа консервативных сил, но она не приводит к увеличению потенциальной энергии. В результате полная механическая энергия системы убывает.

Поэтому если в системе действуют силы трения, то работа этих сил должна учитываться точно так же, как и работа внешних сил, несмотря на то что силы трения могут быть внутренними. Для замкнутой системы, в которой между телами действуют силы трения, изменение энергии равно работе сил трения:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}}. \qquad (6.11.1)$$

Хотя силы трения могут совершать и положительную работу, суммарная работа сил трения внутри системы всегда отрицательна. Понять, почему это так, можно на простом примере.

Найдём изменение кинетической энергии в системе, состоящей из тележки массой M, движущейся без трения со скоростью $\vec{v}_0$ по гладкой горизонтальной поверхности, и кирпича массой m, положенного на тележку в начальный момент времени (рис. 6.23). Пусть кирпич сначала скользит по

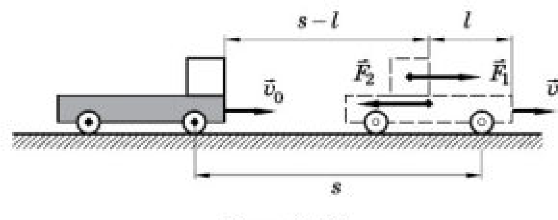


Рис. 6.23

тележке и проходит относительно неё расстояние l. После этого кирпич движется вместе с тележкой. Коэффициент трения между кирпичом и тележкой равен μ.

За время t тележка пройдёт относительно Земли путь s, а скользящий по ней кирпич пройдёт путь $s - l$. После этого они будут двигаться с одинаковой скоростью $\vec{v}$.

Сила трения скольжения, равная по модулю $F_1 = \mu mg$, совершит над кирпичом положительную работу, которая увеличит кинетическую энергию кирпича:

$$A_1 = \mu mg(s - l) = \Delta E_{k1} = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа силы трения $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, действующей на тележку, будет отрицательной, что вызовет уменьшение кинетической энергии тележки:

$$A_2 = -\mu mgs = \Delta E_k = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2}.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{(m + M)v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu mgl.$$

Убыль кинетической энергии системы равна работе силы трения на пути, равном относительному перемещению кирпича и тележки. Этот вывод имеет общее значение. Работа двух сил, осуществляющих взаимодействие между телами, не зависит от системы отсчёта (см. § 6.7). Всегда можно перейти к системе отсчёта, относительно которой одно из тел покоится. В этой системе отсчёта работа силы трения, действующей на движущееся тело, всегда отрицательна, так как сила трения направлена против относительной скорости. Но она отрицательна и в любой другой системе отсчёта.

Следовательно, **работа сил трения, действующих внутри системы, всегда отрицательна и механическая энергия в замкнутой системе убывает:**

$$\Delta E = A_{\text{тр}} < 0. \qquad (6.11.2)$$

В любой системе, состоящей из больших макроскопических тел, действуют силы трения. Поэтому в замкнутой системе механическая энергия обязательно убывает: постепенно затухают колебания маятника, останавливается машина с выключенным двигателем и т. д.

О правильном понимании простых вещей

В связи с этим может возникнуть такой вопрос. Известно, что сила трения может поднять кирпич на движущемся с постоянной скоростью транспортёре. Не означает ли это, что работа силы трения увеличивает потенциальную энергию системы кирпич — Земля?

Конечно нет! Ведь сила трения неконсервативна и поэтому не может увеличивать потенциальную энергию.

В данном случае положительная работа силы трения равна отрицательной работе составляющей силы тяжести вдоль наклонной ленты транспортёра. Из-за этого кинетическая энергия кирпича не меняется. Потенциальная же энергия кирпича растёт, так как сила взаимодействия между Землёй и кирпичом, т. е. сила тяжести, совершает отрицательную работу.

Работа силы трения и автомобиль

Остановимся ещё на одном примере довольно неожиданной ситуации, связанной с работой силы трения.

Пусть автомобиль сначала покоится, а затем начинает разгон. Единственной внешней силой, сообщающей автомобилю ускорение, является сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (если нет пробуксовки), действующая на ведущие колёса.

Изменение импульса автомобиля равно импульсу силы трения покоя. Казалось бы, и изменение кинетической энергии автомобиля равно работе силы трения. Но это не так: сила трения покоя ускоряет автомобиль, но никакой работы при этом не совершает.

Ведь точка приложения силы трения, действующей на ведущее колесо автомобиля, не перемещается. В любой момент точка соприкосновения колеса с дорогой покоится относительно дороги в системе отсчёта, связанной с дорогой. При движении автомобиля она исчезает в одной точке и сразу же появляется в соседней.

Равенство нулю работы силы трения ясно и из того, что мощность $N = \vec{F}_{тр} \cdot \vec{\upsilon}$, а мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$ нижней точки колеса в любой момент равна нулю.

Дело здесь в том, что теорема об изменении кинетической энергии (см. § 6.5) применима к материальной точке (или к системе тел, потенциальная энергия которых не меняется). В случае с автомобилем это не так.

Для пояснения рассмотрим чисто механическую систему: игрушечный автомобиль с пружинным заводом. Вначале пружина заведена и её потенциальная энергия $E_{p1} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ отлична от нуля. Кинетическая энергия равна нулю, и полная начальная энергия автомобиля $E_1 = E_{p1}$. В конечном состоянии, когда деформация пружины исчезнет, потенциальная энергия $E_{p2} = 0$, а кинетическая энергия $E_{k2} = \frac{mv^2}{2}$. Полная энергия $E_2 = E_{k2}$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{mv^2}{2} - \frac{k(\Delta l)^2}{2} = A_{\text{тр}},$$

где $A_{\text{тр}}$ — работа внешних сил. Но эта работа равна нулю и, следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

Если колёса проскальзывают, то $A_{\text{тр}} < 0$, так как точка соприкосновения колёс с землёй движется против направления силы трения. Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + A_{\text{тр}}.$$

Так как $A_{\text{тр}} < 0$, то кинетическая энергия автомобиля в конечном состоянии меньше, чем при отсутствии проскальзывания.

Переход механической энергии в другие формы

Убывание механической энергии не означает, что эта энергия исчезает бесследно. В действительности происходит переход энергии из механической формы в другие. Обычно при работе сил трения скольжения тела нагреваются, или, как говорят, увеличивается их внутренняя энергия. Нагревание при действии сил трения легко обнаружить. Для этого, например, достаточно энергично потереть монету о стол. С повышением температуры увеличивается кинетическая энергия теплового движения молекул. Следовательно, при действии сил трения кинетическая энергия тела, движущегося как целое, превращается в кинетическую энергию хаотически движущихся молекул.

В двигателях внутреннего сгорания, паровых турбинах, электродвигателях и т. д. механическая энергия появляется

за счёт убыли энергии других форм: химической, электрической и т. д.

При действии в системе тел сил трения механическая энергия убывает. Происходит превращение механической энергии в другие формы.

? 1. Могут ли внутренние силы изменить механическую энергию системы?

2. Приведите примеры диссипации (рассеяния) механической энергии.

§ 6.12. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач данного параграфа используется наряду с другими соотношениями механики закон сохранения энергии.

При применении закона сохранения энергии надо прежде всего выяснить, какое состояние системы целесообразно считать начальным, а какое конечным. Затем записать начальную энергию системы и приравнять её конечной. При записи потенциальной энергии надо предварительно выбрать нулевой уровень потенциальной энергии в наиболее удобной форме.

Если система не замкнута, то изменение энергии равно работе внешних сил. Работа сил трения всегда рассматривается как работа внешних сил, так как при действии внутри системы сил трения механическая энергия не сохраняется. Не сохраняется она и при неупругом ударе.

Надо помнить, что работа и кинетическая энергия зависят от системы отсчёта, а потенциальная энергия не зависит.

Задача 1

Трактор массой m = 980 кг, развивающий мощность N = 20 л. с., поднимается в гору с постоянной скоростью υ = 5 м/с. Определите угол α наклона горы к горизонту. Силу сопротивления движению не учитывать.

Решение. Мощность двигателя $N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$. Сила тяги $\vec{F}$ равна по модулю составляющей силы тяжести, параллельной плоскости, так как движение равномерное: $F = mg\sin\alpha$. Следовательно,

$$N = mg\upsilon\sin\alpha.$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{N}{mg\upsilon} \approx 0{,}3, \quad \alpha \approx 17^\circ.$$

Задача 2

Ящик с песком, имеющий массу M, подвешен на тросе длиной l. Длина троса значительно больше размеров ящика (баллистический маятник). Пуля массой m летит горизонтально и застревает в ящике. Трос после попадания пули отклоняется на угол α от вертикали. Определите модуль скорости пули $\vec{v}_0$.

Решение. Скорость ящика $\vec{u}$ сразу после попадания в него пули найдём с помощью закона сохранения импульса, записав его в проекциях на ось X (рис. 6.24, *а*, *б*):

$$mv_0 = (m + M)u.$$

Механическая энергия при этом не сохраняется, так как соударение неупругое.
Отсюда

$$u = \frac{mv_0}{m + M}. \qquad (6.12.1)$$

Согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия ящика с пулей сразу после попадания пули в ящик равна потенциальной энергии в момент максимального отклонения маятника от положения равновесия:

$$\frac{m + M}{2}u^2 = (m + M)gh, \qquad (6.12.2)$$

где h — высота, на которую поднимается ящик с пулей (рис. 6.24, *в*).

Из уравнения (6.12.2) имеем

$$u = \sqrt{2gh}. \qquad (6.12.3)$$

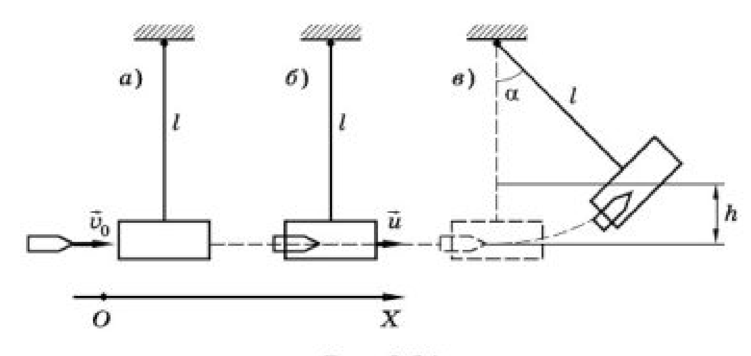


Рис. 6.24

Высоту h можно найти по длине троса и углу отклонения маятника от положения равновесия (см. рис. 6.24, *в*):

$$h = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (6.12.4)$$

Из выражений (6.12.4), (6.12.3) и (6.12.1) получим

$$v_0 = \frac{2(m+M)}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 3

Две пластины, массы которых равны m_1 и m_2, скреплены между собой пружиной (рис. 6.25, *а*). С какой силой F нужно давить на верхнюю пластину, чтобы, двигаясь вверх после прекращения действия силы, верхняя пластина приподняла нижнюю?

Решение. Пусть верхняя пластина занимает положение *1* при недеформированной пружине, а положение *3* соответствует подъёму пластины на максимальную высоту (рис. 6.25, *б*, справа) при условии, что нижняя пластина ещё не оторвалась от плоскости.

Нижняя пластина приподнимается, если действующая на неё сила упругости больше силы притяжения её к Земле: $kx_2 > m_2g$. Здесь x_2 — деформация пружины в момент, когда верхняя пластина достигает максимальной высоты.

Для того чтобы пружина растянулась на величину x_2, её необходимо сжать на величину x_1 (положение *2* на рисунке 6.25, *б*, слева), которая может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + m_1g(x_1 + x_2).$$

Здесь мы приняли, что в положении *2* потенциальная энергия взаимодействия с Землёй верхней пластины равна нулю.

Преобразуем это уравнение к более простому виду:

$$\frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) = -(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) =$$

$$= m_1g(x_1 + x_2).$$

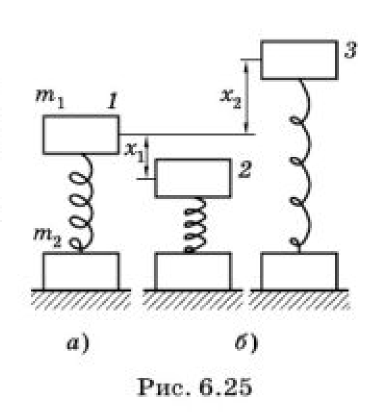


Рис. 6.25

После деления правой и левой частей уравнения на $x_1 + x_2$ получим

$$kx_1 = kx_2 + 2m_1g.$$

Так как $kx_2 > m_2g$, то

$$x_1 > \frac{2m_1g}{k} + \frac{m_2g}{k}.$$

Чтобы сжать пружину на величину x_1, необходимо к весу верхней пластины m_1g добавить силу F, удовлетворяющую равенству

$$F + m_1g = kx_1.$$

Подставляя сюда найденное значение x_1, получим искомую силу:

$$F > m_1g + m_2g.$$

Задача 4

Вычислите вторую космическую скорость υ_{II} (наименьшую скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно, преодолев гравитационное притяжение Земли, удалилось от неё на бесконечно большое расстояние).

Решение. Если тело массой m приобрело у поверхности Земли скорость υ_0, а на расстоянии R от центра Земли имеет скорость υ, то, согласно закону сохранения энергии (сопротивление воздуха не учитываем),

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} - G\frac{mM}{R_З} = \frac{m\upsilon^2}{2} - G\frac{mM}{R}.$$

Здесь M и $R_З$ — соответственно масса и радиус Земли. Когда тело удаляется от Земли на бесконечно большое расстояние ($R \to \infty$), то скорость υ_0 будет наименьшей (т. е. $\upsilon_0 = \upsilon_{\text{II}}$) при $\upsilon = 0$. Следовательно,

$$\frac{m\upsilon_{\text{II}}^2}{2} - G\frac{mM}{R_З} = 0.$$

Отсюда

$$\upsilon_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{R_З}} = \sqrt{2gR_З} = \upsilon_1\sqrt{2} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

(υ_1 — первая космическая скорость).

Задача 5

Шарик, движущийся со скоростью $\vec{v}$, налетает на стенку, которая движется навстречу шарику со скоростью $\vec{u}$ (рис. 6.26). Происходит упругий удар. Определите скорость шарика после удара. Массу стенки считать бесконечно большой.

Решение. Проще всего решить эту задачу, рассматривая соударение шарика в системе отсчёта, связанной со стенкой. В этой системе отсчёта проекция скорости шарика на координатную ось X системы координат, связанной со стенкой, равна $v + u$, если ось X направлена горизонтально слева направо (см. рис. 6.26). После удара в этой системе отсчёта проекция скорости шарика станет равной $-(v + u)$. Проекция скорости $\vec{v}_а$ шарика после удара относительно неподвижной системы отсчёта, согласно закону сложения скоростей, равна

$$v_{ax} = -(v + u) - u = -(v + 2u).$$

Модуль скорости $v_а = v + 2u$.

Задача 6

Частица массой m_1 налетает со скоростью $\vec{v}_1$ на покоящуюся частицу, масса которой $m_2 = 3m_1$. Происходит абсолютно упругое нецентральное соударение, после которого вторая частица начинает двигаться под углом $\alpha_2 = 45°$ к первоначальному направлению движения первой частицы. Найдите модули скоростей обеих частиц и направление скорости первой частицы после соударения.

Решение. Выберем ось так, чтобы её направление совпадало с направлением скорости $\vec{v}_1$, а ось Y была перпендикулярна этому направлению (рис. 6.27).

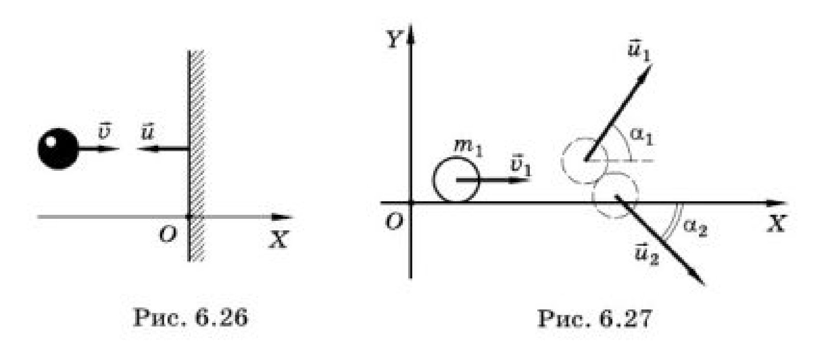


Рис. 6.26 Рис. 6.27

Скорости частиц после взаимодействия обозначим через $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Направление скорости $\vec{u}_1$ изобразим ориентировочно, так как точное направление нам неизвестно.

Неизвестные скорости, как обычно, находим, определяя их проекции на оси координат. Эти проекции можно определить с помощью законов сохранения импульса и энергии. Согласно закону сохранения импульса,

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

Запишем это уравнение в проекциях на оси X и Y:

$$m_1v_1 = m_1u_{1x} + 3m_1u_2\cos\alpha_2,$$

$$0 = m_1u_{1y} - 3m_1u_2\sin\alpha_2.$$

Отсюда

$$u_{1x} = v_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,u_2,\ u_{1y} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,u_2. \qquad (6.12.5)$$

Для модуля скорости $\vec{u}_1$ имеем

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{v_1^2 - 3\sqrt{2}v_1u_2 + 9u_2^2}. \qquad (6.12.6)$$

Теперь применим закон сохранения энергии. В данном случае сохраняется кинетическая энергия частиц:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \qquad (6.12.7)$$

Подставив (6.12.6) в (6.12.7), учитывая, что $m_2 = 3m_1$, получим

$$v_1^2 = v_1^2 - 3\sqrt{2}\,v_1u_2 + 12u_2^2.$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}v_1.$$

Найдём проекции скорости $\vec{u}_1$ на оси X и Y, используя уравнения (6.12.5) и найденное значение u_2:

$$u_{1x} = v_1 - \frac{3}{4}v_1 = \frac{v_1}{4},$$

$$u_{1y} = \frac{3}{4}v_1.$$

Модуль скорости $\vec{u}_1$ равен

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} v_1.$$

Направление вектора скорости $\vec{u}_1$ образует с осью X угол α_1, удовлетворяющий уравнению

$$\cos \alpha_1 = \frac{u_{1x}}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}32.$$

Пользуясь тригонометрическими таблицами, находим, что

$$\alpha_1 = 71°.$$

Упражнение 11

1. Почему при абсолютно упругом соударении шарика со стенкой импульс шарика меняется, а кинетическая энергия не меняется?

2. Тело массой 1 кг поднимают на высоту 5 м, прикладывая вертикальную силу, равную 13 Н. Какая работа совершается при этом равнодействующей силой?

3. Автомобиль массой 2 т трогается с места и едет в гору, которая поднимается на 2 м на каждые 100 м пути. Пройдя 100 м, он достигает скорости 32,4 км/ч. Коэффициент трения равен 0,05. Определите мощность, развиваемую двигателем.

4. Мощность гидростанции $N = 7{,}35 \cdot 10^7$ Вт. Чему равен объёмный расход воды Q_V, если коэффициент полезного действия станции $\eta = 75\%$ и плотина поднимает уровень воды на высоту $H = 10$ м?

5. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 49$ м/с. На какой высоте H его кинетическая энергия E_k равна его потенциальной энергии E_p?

6. На нити в вертикальной плоскости вращается груз массой m. Найдите разность сил натяжения нити при прохождении грузом нижней и верхней точек траектории.

7. Жёсткий невесомый стержень OB может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку O. В середине стержня и на его конце закреплены два шарика, массы которых $m_A = 4m$ и $m_B = m$. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают (рис. 6.28). Определите натяжение стержня на

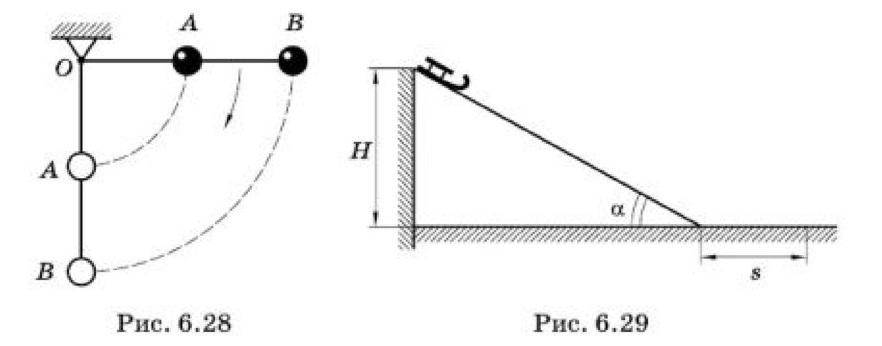


Рис. 6.28 Рис. 6.29

участках OA и AB в момент прохождения положения равновесия.

8. Из шахты глубиной 200 м поднимают с постоянной скоростью груз массой 500 кг на канате, каждый метр которого имеет массу 1,5 кг. Определите работу, совершаемую при поднятии груза.

9. Санки съезжают с горы высотой H и углом наклона α и движутся далее по горизонтальному участку (рис. 6.29). Коэффициент трения на всём пути санок одинаков и равен μ. Определите расстояние s, которое пройдут санки, двигаясь по горизонтальному участку до полной остановки.

10. Шарик массой m = 100 г подвешен на нити длиной l = 1 м. Шарик раскручивают так, что он движется по окружности в горизонтальной плоскости, отстоящей от точки подвеса на половину длины нити (конический маятник). Какую работу надо совершить для раскручивания шарика?

11. Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, он также наполнится водой, но работы не совершит. Как согласовать полученный в первом случае выигрыш в работе с законом сохранения энергии?

12. Свинцовый шар массой m_1 = 500 г, движущийся со скоростью v_1 = 10 м/с, сталкивается с неподвижным шаром из воска массой m_2 = 200 г, после чего шары движутся вместе. Определите кинетическую энергию шаров после удара.

13. С какой скоростью u должна двигаться нога футболиста, чтобы после столкновения с ней мяч остановился? Ско-

рость мяча до столкновения равна v. Массу мяча считать много меньшей массы ноги.

14. Шар массой M, имеющий скорость $\vec{v}$, налетает на покоящийся шар массой m. Происходит центральный абсолютно упругий удар. В момент наибольшей деформации шары имеют одинаковую скорость. Чему равна потенциальная энергия деформации шаров в этот момент времени?

15. На покоящийся шар налетает второй шар, имеющий перед ударом скорость $\vec{v}$. Происходит упругий нецентральный удар. Докажите, что угол между скоростями шаров после удара равен 90°, если шары имеют одинаковые массы.

16. Мяч брошен вертикально вверх. Учитывая сопротивление воздуха, сравните время подъёма и время падения мяча.

17. Однородная цепочка длиной l лежит на абсолютно гладкой доске. Небольшая часть цепочки пропущена в отверстие, сделанное в доске (рис. 6.30). В начальный момент времени лежащий на доске конец цепочки придерживают, а затем отпускают, и цепочка начинает соскальзывать с доски под действием силы тяжести свешивающегося конца. Определите скорость движения цепочки в момент, когда длина свешивающейся части равна l.

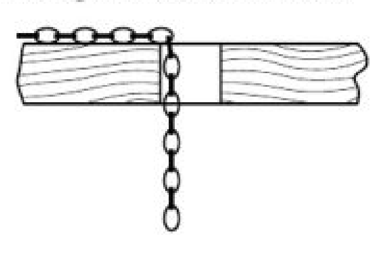


Рис. 6.30

18. С горки высотой h соскальзывает брусок массой m и останавливается на горизонтальной поверхности из-за действия силы трения. Какую работу надо совершить, чтобы поднять брусок на вершину этой горки, не увеличивая его кинетическую энергию? Брусок перемещают так, что он не отрывается от поверхности, и сила, под действием которой поднимается груз, направлена по касательной к поверхности во всех точках.

19. Между двумя шариками массами m и M находится сжатая пружина. Если один шарик (массой M) удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью $\vec{v}$. С какой скоростью будет двигаться шарик массой m, если оба шарика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях.

20. От поезда массой $M = 600$ т, идущего с постоянной скоростью по прямолинейному горизонтальному пути, отры-

вается последний вагон массой $m = 60$ т. Какое расстояние до остановки пройдёт этот вагон, если в момент его остановки поезд движется с постоянной скоростью 40 км/ч? Мощность тепловоза, ведущего состав вагонов, постоянна и равна $N = 1$ МВт.

21. Сваю массой 1000 кг забивают в грунт копром, масса которого 4000 кг. Копёр свободно падает с высоты 5 м, и при каждом ударе свая опускается на глубину 5 см. Определите силу сопротивления грунта, считая её постоянной.

22. Колодец, площадь дна которого S и глубина H, наполовину заполнен водой. Насос выкачивает воду и подаёт её на поверхность Земли через цилиндрическую трубу радиусом R. Какую работу A совершит насос, если выкачает всю воду из колодца за время τ?

23. Рассматривая падение камня на Землю, мы утверждаем, что изменение импульса Земли равно изменению импульса камня, а изменение кинетической энергии Земли при этом не нужно учитывать. Как это объяснить?

24. Кубик соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой h. Согласно закону сохранения энергии, его кинетическая энергия у основания плоскости равна $\frac{mv^2}{2} = mgh$. Рассмотрим теперь движение кубика с точки зрения инерциальной системы отсчёта, движущейся вдоль горизонтальной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gh}$. В этой системе отсчёта начальная скорость кубика равна $v = \sqrt{2gh}$, а конечная скорость равна нулю. Следовательно, начальная энергия $E_1 = \frac{mv^2}{2} + mgh = 2mgh$, а конечная $E_2 = 0$. Куда же исчезла энергия?

25. С высоты $2R$ соскальзывает небольшое тело по жёлобу, который образует «мёртвую петлю» радиусом R (рис. 6.31). На какой высоте h относительно уровня AB тело оторвётся от жёлоба? На какой высоте H оно пройдёт над точкой A?

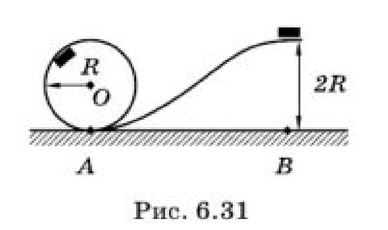


Рис. 6.31

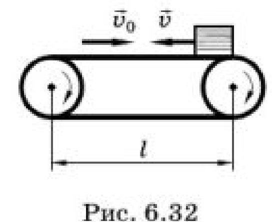


Рис. 6.32

26. Лента транспортёра длиной l движется со скоростью v_0 (рис. 6.32). С какой скоростью v нужно толкнуть кубик массой m против движения ленты, чтобы уменьшение механической энергии за счёт работы силы трения между кубиком и лентой транспортёра было максимальным? Чему равно это уменьшение механической энергии ΔE, если коэффициент трения равен μ и выполняется условие $v_0^2 < 2\mu l g$?

---

1. Подготовьте доклад «Двигатели: от лошади до BENTLEY».
2. Каким образом в технике появилась единица мощности — лошадиная сила (л. с.)?
3. Составьте обобщающую и систематизирующую схему по теме «Энергия в механике. Закон сохранения энергии в механике».
4. Напишите эссе «Энергия: есть, чтобы жить, или жить, чтобы есть».

ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Глава 7

ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Предыдущие главы были посвящены описанию движения материальной точки. Именно для точки вводятся понятия координат, скорости, траектории, ускорения. Описать движение точки проще всего. Но точек в природе нет, и далеко не во всех случаях тело можно рассматривать как точку. Надо уметь описывать движение реальных тел.

§ 7.1. АБСОЛЮТНО ТВЁРДОЕ ТЕЛО И ВИДЫ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Проще всего описать движение тела, взаимное расположение частей которого не изменяется. Такое тело называется абсолютно твёрдым.



При изучении кинематики мы говорили, что описать движение тела — это значит описать движение всех его точек. Иными словами, надо уметь находить координаты, скорость, ускорение, траектории всех точек тела. В общем случае это сложная задача, и мы не будем пытаться её решать. Особенно она сложна, когда тела заметно деформируются в процессе движения.

Тело можно считать абсолютно твёрдым, если расстояния между двумя любыми точками тела неизменны. Иначе говоря, форма и размеры абсолютно твёрдого тела не изменяются при действии на него любых сил[1].

На самом деле таких тел нет. Это физическая модель. В тех случаях, когда деформации малы, можно реальные тела рассматривать как абсолютно твёрдые. Однако и движение твёрдого тела в общем случае сложно. Мы остановимся на двух наиболее простых видах движения твёрдого тела: поступательном и вращательном.

Поступательное движение

Твёрдое тело движется поступательно, если любой отрезок прямой линии, жёстко связанный с телом, всё время перемещается параллельно самому себе.

При поступательном движении все точки тела совершают одинаковые перемещения, описывают одинаковые траектории, проходят одинаковые пути, имеют равные скорости и ускорения. Покажем это.

Пусть тело движется поступательно. Соединим две произвольные точки A и B тела отрезком прямой линии (рис. 7.1). Отрезок AB должен оставаться параллельным самому себе. Расстояние AB не изменяется, так как тело абсолютно твёрдое.

В процессе поступательного движения вектор $\overrightarrow{AB}$ не изменяется, т. е. остаются постоянными его модуль и направление. Вследствие этого траектории точек A и B идентичны, так как они могут быть полностью совмещены параллельным переносом на $\overrightarrow{AB}$.

Нетрудно заметить, что перемещения точек A и B одинаковы и совершаются за одно и то же время. Следовательно, точки A и B имеют одинаковые скорости. Одинаковы у них и ускорения.

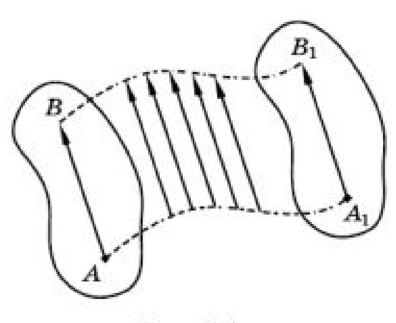


Рис. 7.1

Совершенно очевидно, что для описания поступательного движения тела достаточно описать движение какой-либо

[1] В дальнейшем для краткости мы будем говорить просто о твёрдом теле.

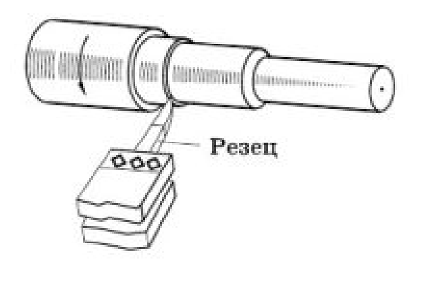


Рис. 7.2

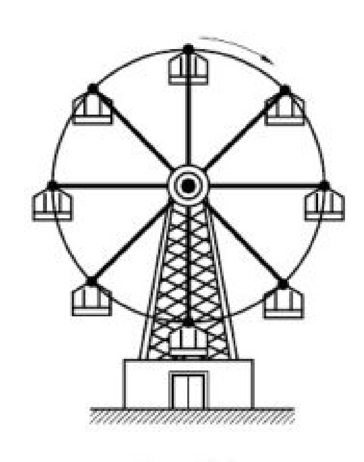
одной его точки, так как все точки движутся одинаково. Лишь в этом движении можно говорить о скорости тела и ускорении тела. При любом другом движении тела его точки имеют различные скорости и ускорения, и термины «скорость тела» или «ускорение тела» теряют смысл.

Приблизительно поступательно движется ящик письменного стола, поршни двигателя автомобиля относительно цилиндров, вагоны на прямолинейном участке железной дороги, резец токарного станка относительно станины (рис. 7.2) и т. д. Поступательными можно считать и движения, имеющие довольно сложный вид, например движение педали велосипеда или кабины колеса обозрения (рис. 7.3) в парках.

Вращательное движение

Вращательное движение вокруг неподвижной оси — ещё один вид движения твёрдого тела.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, перпендикулярной плоскостям этих окружностей. Сама эта прямая есть ось вращения (MN на рисунке 7.4).


Рис. 7.3

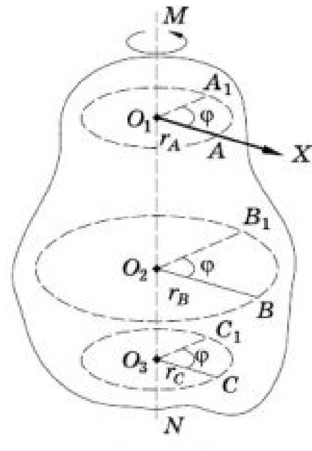


Рис. 7.4

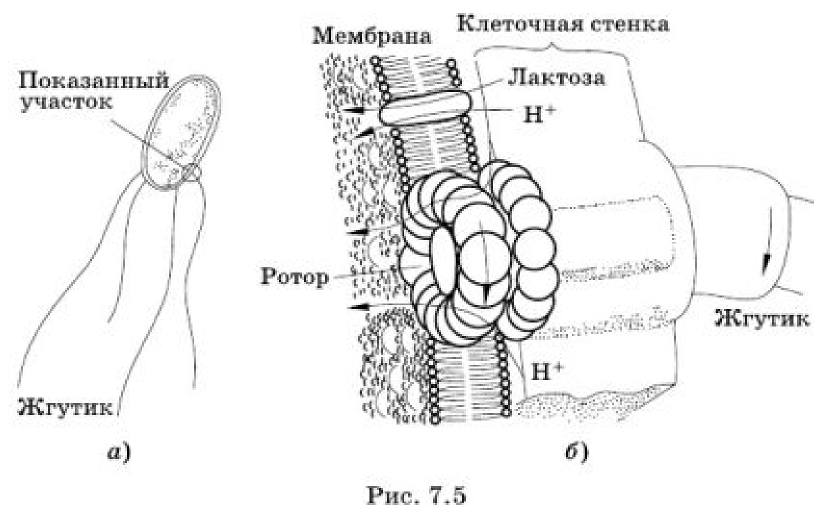


Рис. 7.5

В технике такой вид движения встречается чрезвычайно часто: вращение валов двигателей и генераторов, колёс современных скоростных электропоездов и деревенской телеги, турбин и пропеллеров самолётов и т. д. Вращается Земля вокруг своей оси.

Долгое время считалось, что в живых организмах устройств, подобных вращающемуся колесу, нет: природа не создала колеса. Но исследования последних лет показали, что это не так. У многих бактерий, например у кишечной палочки, имеется «мотор», вращающий жгутики. С помощью этих жгутиков бактерия перемещается в среде (рис. 7.5, *а*). Основание жгутика прикреплено к колёсику (ротору) в форме кольца (рис. 7.5, *б*). Плоскость ротора параллельна другому кольцу, закреплённому в мембране клетки. Ротор вращается, делая до 300 оборотов в секунду. Механизм, приводящий ротор во вращение, остаётся пока во многом не ясным.

Кинематическое описание вращательного движения твёрдого тела

При вращении тела радиус r_A окружности, описываемой точкой A этого тела (см. рис. 7.4), повернётся за интервал времени Δt на некоторый угол φ. Легко видеть, что вследствие неизменности взаимного расположения точек тела на такой же угол φ повернутся за то же время и радиусы окружностей, описываемых любыми другими точками тела (см. рис. 7.4). Следовательно, этот угол φ можно считать величиной, характеризующей движение не только отдель-

ной точки тела, но и вращательное движение всего тела в целом. Стало быть, для описания вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси достаточно лишь одной величины — переменной $\varphi(t)$.

Этой единственной величиной (координатой) и может служить угол φ, на который поворачивается тело вокруг оси относительно некоторого своего положения, принятого за нулевое. Это положение задаётся осью O_1X на рисунке 7.4 (отрезки O_2B, O_3C параллельны O_1X).

В § 1.28 было рассмотрено движение точки по окружности. Были введены понятия угловой скорости ω и углового ускорения β. Так как при вращении твёрдого тела все его точки за одинаковые интервалы времени поворачиваются на одинаковые углы, то все формулы, описывающие движение точки по окружности, оказываются применимыми и для описания вращения твёрдого тела. Определения угловой скорости (1.28.2) и углового ускорения (1.28.6) могут быть отнесены к вращению твёрдого тела. Точно так же справедливы формулы (1.28.7) и (1.28.8) для описания движения твёрдого тела с постоянным угловым ускорением.

Связь между линейной и угловой скоростями (см. § 1.28) для каждой точки твёрдого тела даётся формулой

$$\upsilon = \omega R, \qquad (7.1.1)$$

где R — расстояние точки от оси вращения, т. е. радиус окружности, описываемой точкой вращающегося тела. Направлена линейная скорость по касательной к этой окружности. Различные точки твёрдого тела имеют разные линейные скорости при одной и той же угловой скорости.

Различные точки твёрдого тела имеют нормальные и тангенциальные ускорения, определяемые формулами (1.28.10) и (1.28.11):

$$a_n = \omega^2 R,\ a_\tau = \beta R. \qquad (7.1.2)$$

Плоскопараллельное движение

Плоскопараллельным (или просто плоским) движением твёрдого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется всё время в одной плоскости. Причём все плоскости, в которых движутся точки, параллельны между собой. Типичный пример плоскопараллельного движения — качение цилиндра по плоскости. Плоскопараллельным является также движение колеса по прямому рельсу.

Напомним (в который раз!), что говорить о характере движения того или иного тела можно лишь по отношению к определённой системе отсчёта. Так, в приведённых примерах в системе отсчёта, связанной с рельсом (землёй), движение цилиндра или колеса является плоскопараллельным, а в системе отсчёта, связанной с осью колеса (или цилиндра), — вращательным. Следовательно, скорость каждой точки колеса в системе отсчёта, связанной с землёй (абсолютная скорость), согласно закону сложения скоростей, равна векторной сумме линейной скорости вращательного движения (относительной скорости) и скорости поступательного движения оси (переносной скорости) (рис. 7.6):

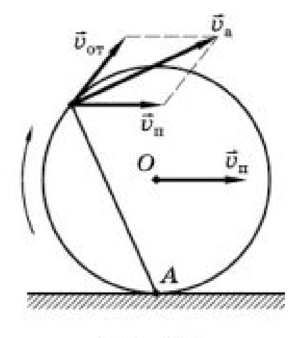


Рис. 7.6

$$\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}.$$

Мгновенный центр вращения

Пусть тонкий диск катится по плоскости (рис. 7.7). Окружность можно рассматривать как правильный многоугольник со сколь угодно большим числом сторон. Поэтому круг, изображённый на рисунке 7.7, можно мысленно заменить многоугольником (рис. 7.8). Но движение последнего состоит из ряда небольших поворотов: сначала вокруг точки C, затем вокруг точек C_1, C_2 и т. д. Поэтому движение диска тоже можно рассматривать как последовательность очень малых (бесконечно малых) поворотов вокруг точек C, C_1, C_2 и т. д.[1]. Таким образом, в каждый момент времени диск вра-

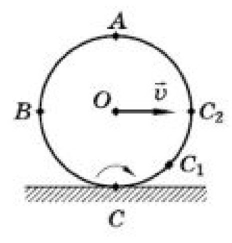


Рис. 7.7

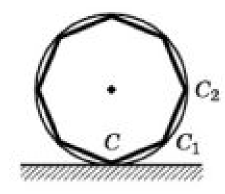


Рис. 7.8

[1] Разумеется, изобразить на рисунке многоугольник с бесконечным числом сторон невозможно.

щается вокруг своей нижней точки C. Эта точка называется **мгновенным центром вращения диска.** В случае качения диска по плоскости можно говорить о *мгновенной оси вращения.* Этой осью является линия соприкосновения диска с плоскостью в данный момент времени.

Введение понятия мгновенного центра (мгновенной оси) вращения упрощает решение ряда задач. Например, зная, что центр диска имеет скорость $\vec{v}$, можно найти скорость точки A (см. рис. 7.7). Действительно, так как диск вращается вокруг мгновенного центра C, то радиус вращения точки A равен AC, а радиус вращения точки O равен OC. Но так как $AC = 2OC$, то

$$v_A = 2v_0 = 2v.$$

Аналогично можно найти скорость любой точки этого диска.

Мы познакомились с наиболее простыми видами движения твёрдого тела: поступательным, вращательным, плоскопараллельным. В дальнейшем нам предстоит заняться динамикой твёрдого тела.

? 1. Докажите, что абсолютно твёрдое тело — это физическая модель.

2. Каковы кинематические особенности описания различных видов движения абсолютно твёрдого тела?

§ 7.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Шкив *1* радиусом $O_1B = r_1 = 0{,}5$ м вращается равномерно с частотой $n_1 = 0{,}5$ с$^{-1}$. Он соединён ремённой передачей со шкивом *2* радиусом $O_2C = r_2 = 1$ м (рис. 7.9). Определите модули скорости и ускорения точки A шкива *3* радиусом

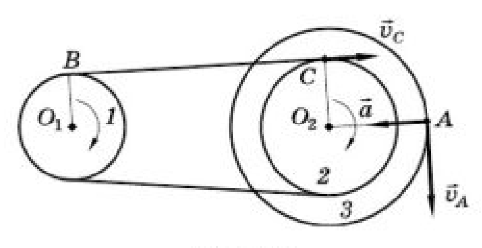


Рис. 7.9

$O_2A = R = 1{,}2$ м, жёстко соединённого со шкивом *2*. Ремень не проскальзывает.

Решение. Так как все точки ремня имеют одинаковые по модулю скорости, то $\upsilon_B = \upsilon_C$ или $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, где ω_1 и ω_2 — угловые скорости шкивов *1* и *2*. Отсюда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Частота вращения равна n_1. Следовательно (см. § 1.28),

$$\omega_1 = 2\pi n_1.$$

Определим угловую скорость шкива *2*:

$$\omega_2 = 2\pi n_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Так как шкив *3*, которому принадлежит точка A, жёстко соединён со шкивом *2*, то угловые скорости шкивов одинаковы и, следовательно, скорость точки A равна

$$\upsilon_A = \omega_2 R = \frac{2\pi n_1 r_1}{r_2} R;$$

$$\upsilon_A = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{1} \cdot 1{,}2 \text{ м/с} \approx 2 \text{ м/с}.$$

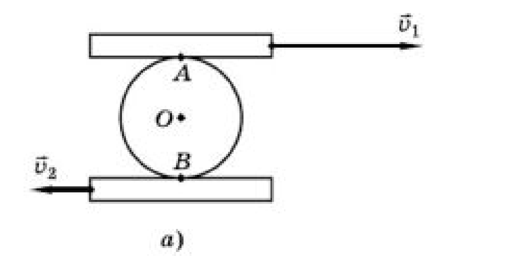
Так как $\omega_2 = \text{const}$, то модуль нормального ускорения точки A равен

$$a_n = \omega_2^2 R = 3 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2

Две параллельные рейки движутся в противоположные стороны со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. Между рейками зажат диск радиусом R, катящийся по рейкам без проскальзывания (рис. 7.10, *а*). Найдите угловую скорость диска и скорость его центра.

Решение. Так как диск катится по рейкам без проскальзывания, то скорости точек A и B равны скоростям движения реек. Найдём точку, относительно которой диск можно считать вращающимся в каждое мгновение (мгновенный центр вращения). Для этого соединим концы векторов скоростей



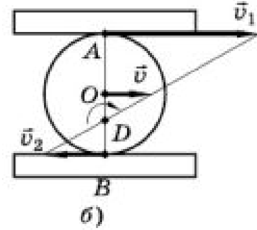


Рис. 7.10

точек A и B (рис. 7.10, *б*). Точка пересечения этого отрезка с диаметром AB является центром вращения диска в данный момент времени.

Определим расстояние от мгновенного центра вращения (точка D) до центра симметрии O диска. Полагая $OD = x$, имеем

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{AD}{BD} = \frac{R + x}{R - x}.$$

Отсюда

$$x = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}R.$$

Воспользовавшись формулой (7.1.1), вычислим угловую скорость диска:

$$\omega = \frac{v_1}{AD} = \frac{v_1}{R + x}.$$

Учитывая, что $R + x = \dfrac{2Rv_1}{v_1 + v_2}$, получим

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}.$$

Модуль скорости центра диска определим по формуле

$$v = \omega \cdot OD = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

Упражнение 12

1. Линейная скорость точек окружности вращающегося диска равна $v_1 = 3$ м/с, а точек, находящихся ближе к оси вращения на расстояние $l = 10$ см, $v_2 = 2$ м/с. Сколько оборотов в минуту делает диск?

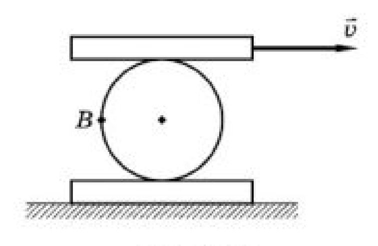


Рис. 7.11

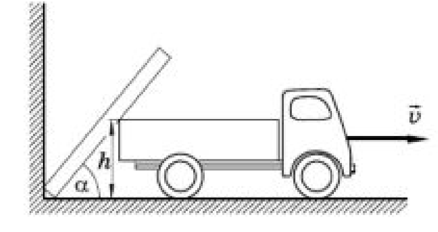


Рис. 7.12

2. Найдите модули линейной скорости и нормального ускорения точек поверхности земного шара: а) на экваторе; б) на широте 60°. Средний радиус земного шара считать равным 6400 км.

3. Диск радиусом R зажат между двумя параллельными рейками (рис. 7.11). Нижняя рейка неподвижна, а верхняя движется со скоростью $\upsilon = 4$ м/с. Определите скорость точки B диска относительно неподвижного наблюдателя, если проскальзывание отсутствует.

4. Бревно нижним концом упирается в угол между стеной и землёй и касается борта грузовика на высоте h от земли (рис. 7.12). Найдите угловую скорость бревна в зависимости от угла α, если грузовик отъезжает со скоростью $\vec{\upsilon}$. При движении грузовик не увлекает бревно за собой.

5. Трамвай движется со скоростью $\vec{\upsilon}$. Радиус трамвайного колеса равен r, а радиус реборды — R (рис. 7.13). С какой скоростью и в каком направлении движется в данный момент времени верхняя точка реборды (точка B)?

6. Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 2{,}5$ рад/с, приводит в движение колесо радиусом $AB = r = 5$ см, катящееся по неподвижному колесу радиусом $R = 15$ см (рис. 7.14). Найдите скорость точки B.

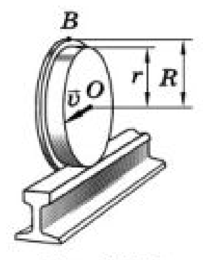


Рис. 7.13

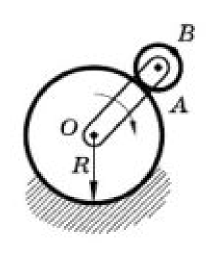


Рис. 7.14

§ 7.3. ЦЕНТР МАСС ТВЁРДОГО ТЕЛА. ИМПУЛЬС ТВЁРДОГО ТЕЛА

Вывод законов движения твёрдого тела на основе законов динамики материальной точки — сложная задача. Мы не будем останавливаться на её общем решении. Вначале познакомимся с динамикой наиболее простого, поступательного движения твёрдого тела. Для этого нужно ввести очень важное для динамики твёрдого тела понятие — центр масс.

Центр масс

Бросим палку так, чтобы в полёте она вращалась в вертикальной плоскости. Если палка однородная, то можно заметить, что точка, находящаяся в центре палки, движется по плавной линии — такой, по которой летел бы брошенный камень, сама же палка вращается вокруг этой точки (рис. 7.15). Прикрепим к одному из концов палки груз и снова её бросим таким же образом. Движение будет похожим, однако точка, движущаяся по плавной кривой, оказывается не в центре палки, а ближе к грузу (рис. 7.16).

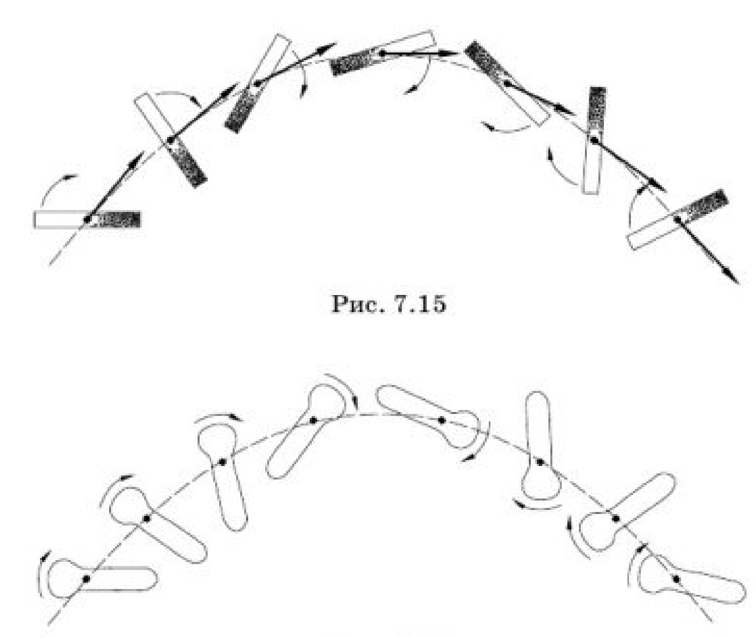


Рис. 7.15

Рис. 7.16

Из этого примера можно сделать вывод, *что существует такая точка тела, которая движется так, как будто на неё действуют только внешние силы, причём её положение зависит от того, как распределена масса внутри тела.* Такую точку назовём **центром масс тела.**

Пусть система состоит из двух материальных точек массами m_1 и m_2. Разумно предположить, что центр масс расположен на отрезке прямой, соединяющей эти точки, и находится ближе к точке с большей массой. Наиболее простым будет предположение, что расстояния l_1 и l_2 от соответствующих точек до центра масс обратно пропорциональны массам этих точек[1], т. е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}, \text{ или } m_1 l_1 = m_2 l_2. \qquad (7.3.1)$$

Пусть $\vec{l_1}$ и $\vec{l_2}$ — векторы, проведённые от точек к центру масс; $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ — радиусы-векторы точек, а $\vec{r_c}$ — радиус-вектор, проведённый из начала координат к центру масс этих двух точек. Тогда, как видно из рисунка 7.17,

$$\vec{r_1} + \vec{l_1} = \vec{r_c},$$
$$\vec{r_2} + \vec{l_2} = \vec{r_c}.$$

Умножив обе части первого уравнения на m_1, а второго на m_2, сложим их. В результате получится

$$m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_1\vec{l_1} + m_2\vec{l_2} = (m_1 + m_2)\vec{r_c}.$$

Но из рисунка 7.17 и формулы (7.3.1) следует, что $m_1\vec{l_1} = -m_2\vec{l_2}$. Таким образом, для системы, состоящей из двух точек, положение центра масс определяется радиусом-вектором:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}. \qquad (7.3.2)$$

Обобщим это соотношение на случай системы из произвольного числа материальных точек. В частности, этой системой может быть твёрдое тело. Если массу отдельного i-го элемента (материальной точки) обозначить через Δm_i,

---

[1] Вспомните, что подобное соотношение выполняется при равновесии рычага.

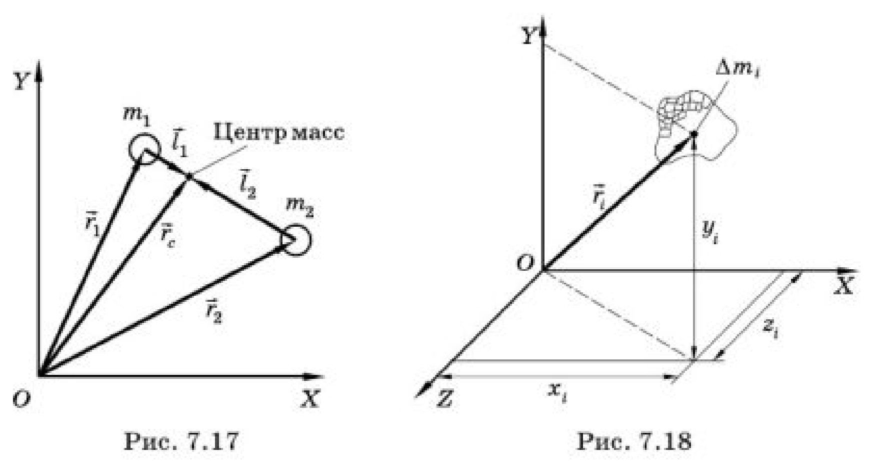


Рис. 7.17 Рис. 7.18

а радиус-вектор — через $\vec{r}_i$, то положение центра масс будет определяться по формуле

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i \vec{r}_i}{m},} \tag{7.3.3}$$

где $m = \sum\limits_i \Delta m_i$ — суммарная масса системы.

Как и любое векторное соотношение, формула (7.3.3) представляет собой компактную запись трёх независимых выражений, определяющих координаты центра масс:

$$x_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i x_i}{m}, \; y_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i y_i}{m}, \; z_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i z_i}{m}. \tag{7.3.4}$$

Здесь x_i, y_i, z_i — координаты одного из элементов тела (рис. 7.18). Далее мы докажем, что точка с координатами, определяемыми выражениями (7.3.4), действительно движется так, как движется материальная точка под действием внешних сил, приложенных к телу.

Мы не будем сейчас обсуждать методы нахождения центра масс различных тел. Ограничимся лишь достаточно очевидным указанием на то, что центр масс всех однородных тел, имеющих центр симметрии, совпадает с этим центром. Так, центр масс однородного шара совпадает с его центром. Центр масс параллелепипеда находится в его центре симметрии. А центр масс однородного стержня находится в его середине.

Центр масс твёрдого тела может находиться и вне самого тела, например у однородной сферы или у кольца. Но всё равно ускорение этой точки, не находящейся в твёрдом теле и соответственно не являющейся материальной точкой, тоже будет определяться внешними силами, приложенными к телу.

Импульс твёрдого тела

Докажем, что **импульс твёрдого тела равен импульсу материальной точки, масса которой равна массе тела, а скорость равна скорости центра масс.**

Импульс твёрдого тела по определению равен суммарному импульсу всех его точек:

$$\vec{p} = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i, \tag{7.3.5}$$

где $\vec{v}_i$ — скорости отдельных точек тела.

С другой стороны, согласно (7.3.3),

$$m\vec{r}_c = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i. \tag{7.3.6}$$

Пусть за малое время Δt радиусы-векторы элементов тела изменяются на $\Delta\vec{r}_i$. Тогда и радиус-вектор центра масс изменится на $\Delta\vec{r}_c$:

$$m\Delta\vec{r}_c = \sum_i \Delta m_i \Delta\vec{r}_i. \tag{7.3.7}$$

Разделим левую и правую части этого выражения на Δt:

$$m\frac{\Delta\vec{r}_c}{\Delta t} = \sum_i \Delta m_i \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t}. \tag{7.3.8}$$

Но $\dfrac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} = \vec{v}_i$ — скорость i-го элемента твёрдого тела, а $\dfrac{\Delta\vec{r}_c}{\Delta t} = \vec{v}_c$ — скорость центра масс.

Следовательно,

$$m\vec{v}_c = \sum_i \Delta m_i \Delta\vec{v}_i. \tag{7.3.9}$$

Сравнивая это выражение с определением импульса тела (7.3.5), придём к выводу:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_c.} \tag{7.3.10}$$

Это и требовалось доказать.

Заметим, что формула (7.3.10), так же как и определение центра масс (7.3.3), относится не только к твёрдому телу, но и к любой совокупности материальных точек. Мы ведь не требовали, чтобы расстояния между отдельными точками оставались неизменными, как это имеет место для твёрдого тела.

Мы ввели важное понятие: «центр масс». Из дальнейшего будет видно, что определённый таким образом центр масс и является той замечательной точкой системы, для определения движения которой достаточно знания лишь внешних сил.

§ 7.4. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Теорема о движении центра масс формулируется следующим образом: центр масс твёрдого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе тела, под действием внешних сил, приложенных к данному телу.

Уравнение движения i-го элемента тела массой Δm_i запишется так:

$$\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Delta m_i \vec{v}_i)}{\Delta t} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i. \qquad (7.4.1)$$

Здесь $\vec{F}_i$ — внешняя сила, а $\sum\limits_{k \neq i} \vec{F}_i$ — сумма внутренних сил, действующих на i-й элемент тела со стороны всех других элементов.

Запишем аналогичные уравнения для всех элементов и сложим их почленно. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Поэтому сумма всех внутренних сил равна нулю, так как в этой сумме будут встречаться только пары сил $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$ при различных значениях i и k.

Следовательно, после сложения уравнений получим

$$\sum_i \frac{\Delta(\Delta m_i \vec{v}_i)}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Поменяв знак суммирования $\sum\limits_i$ и приращения Δ местами, будем иметь

$$\frac{\Delta \sum\limits_i \Delta m_i \vec{v}_i}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Но $\sum_i \Delta m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_c$ (см. § 7.3), поэтому

$$m\vec{a}_c = m\frac{\Delta \vec{v}_c}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i. \qquad (7.4.2)$$

Теорема доказана. Зная внешние силы $\vec{F}_i$ и массу тела, мы можем определить, как движется центр масс. Но, конечно, не можем сказать, как движутся остальные точки тела.

Поступательное движение твёрдого тела

При поступательном движении все точки твёрдого тела движутся одинаково. Следовательно, зная движение центра масс, мы тем самым знаем, как движется всё тело. Таким образом мы доказали возможность замены твёрдого тела материальной точкой при рассмотрении его поступательного движения.

Следствие теоремы о движении центра масс

Из теоремы о движении центра масс вытекает одно очень важное следствие.

Если сумма внешних сил равна нулю, то центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Действительно, если $\sum_i \vec{F}_i = 0$, то, согласно (7.4.2),

$$\frac{\Delta \vec{v}_c}{\Delta t} = 0 \text{ и } \vec{v}_c = \text{const}.$$

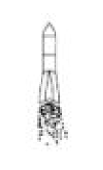
Если в начальный момент $v_c = 0$, то и в дальнейшем центр масс будет оставаться в покое.

Так, например, Мюнхгаузен, герой известной книги «Приключения барона Мюнхгаузена», в действительности не мог бы вытянуть себя из болота за косу (рис. 7.19). Сила, действующая со стороны руки, является внутренней и не в состоянии поднять центр масс барона.

По тем же причинам неосуществим полёт на Луну по проекту французского поэта Сирано де Бержерака. Бержерак



Рис. 7.19



предлагал периодически подбрасывать с железной тележки большой магнит. Магнит должен был якобы с каждым разом подтягивать тележку немного вверх.

Иное дело ракета. При старте ракеты в космическом пространстве центр масс системы ракета — выхлопные газы будет оставаться на месте. Ракета летит в одну сторону, а отработанные газы — в противоположную.

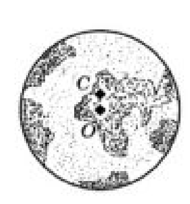


Рис. 7.20

Несколько сложнее обстоит дело при старте ракеты с поверхности Земли. В этом случае остаётся неизменной в инерциальной (гелиоцентрической) системе отсчёта скорость центра масс ракеты, Земли и газов (рис. 7.20). Ведь при старте огненная струя из сопла ракеты ударяет в Землю и слегка смещает её на орбите. Именно из-за этого малого смещения Земли скорость центра масс системы ракета — Земля не меняется при выходе ракеты в космос.

Из теоремы о движении центра масс следует, что внутренние силы не в состоянии изменить скорость центра масс. Это могут сделать только внешние силы, если их векторная сумма не равна нулю.

? **1.** Диск массой m лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К точке на краю диска прикладывают силу $\vec{F}$, направленную по касательной к окружности диска. Каково ускорение $\vec{a}$ центра диска в этот момент?

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит обруч, на котором сидит жук. Будет ли двигаться центр обруча, если жук поползёт по обручу?

§ 7.5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи на движение центра масс не отличаются принципиально от задач на динамику материальной точки. Только в данном случае такой точкой является центр масс.

Действительно, в каких бы точках тела ни были приложены внешние силы, они однозначно определяют ускорение центра масс тела. В случае системы тел внешние силы определяют ускорение центра масс системы.

Тем не менее понятие центра масс глубже и информативнее, чем понятие материальной точки. Оно относится к ре-

альным телам и системам тел. Тело может вращаться вокруг центра масс, а отдельные тела системы могут совершать относительно центра масс перемещения, не влияющие на его движение.

Нужно помнить, что импульс системы равен её массе, умноженной на скорость центра масс.

При решении ряда задач следует использовать формулы для определения координат центра масс, законы сохранения и кинематические соотношения.

Задача 1

На тележке, стоящей на гладкой горизонтальной поверхности, укреплён однородный цилиндр, который может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис. 7.21). На цилиндр намотана нить, к концу которой приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Найдите ускорение тележки, если её масса m_1, а масса цилиндра m_2.

Решение. Тележка с цилиндром — сложная система. Но в задаче требуется определить лишь ускорение тележки. Так как цилиндр однородный, то его вращение не меняет положение центра масс системы относительно тележки. Поэтому ускорение тележки совпадает с ускорением центра масс системы.

Действующие по вертикали силы тяжести и силы реакции опоры взаимно уравновешиваются. Вдоль горизонтали действует только сила $\vec{F}$. Она-то и сообщает ускорение центру масс.

В проекциях на горизонтальную ось X теорема о движении центра масс запишется так:

$$(m_1 + m_2)a_x = F_x.$$

Так как при данном выборе оси X $F_x = F$, то

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Очевидно, что $a_x > 0$ и тележка имеет ускорение, совпадающее с положительным направлением оси X.

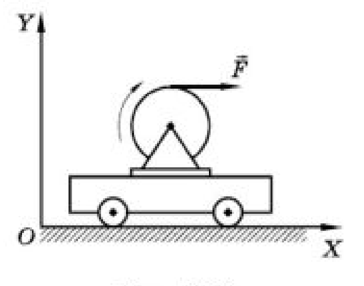


Рис. 7.21

Задача 2

На гладком горизонтальном столе лежит гантелька, состоящая из двух маленьких шариков, соединённых невесомым стержнем длиной l. Массы шариков равны $m_1 = 3m_0$ и $m_2 = 2m_0$. На один из шариков налетает кусочек пластилина массой $m_3 = m_0$ и прилипает к нему. Скорость пластилина $\vec{v}_0$ перпендикулярна стержню, соединяющему шарики (рис. 7.22, *а*). Определите, какая точка стержня после соударения будет двигаться с постоянной скоростью, и найдите эту скорость.

Решение. После столкновения с кусочком пластилина гантелька начнёт вращаться вокруг центра масс образовавшейся системы, а центр масс будет двигаться прямолинейно и равномерно в соответствии с законом сохранения импульса.

Импульс системы до и после соударения остаётся неизменным, так как силами трения можно пренебречь. Действующие по нормали к столу внешние силы взаимно уравновешиваются.

Согласно закону сохранения импульса,

$$m_3\vec{v}_0 = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{v}_c.$$

Отсюда видно, что скорость $\vec{v}_c$ центра масс (точка C на рисунке 7.22, *б*) направлена в ту же сторону, что и скорость пластилина $\vec{v}_0$ до соударения.

Если ось X направить так, как показано на рисунке 7.22, то закон сохранения импульса в проекциях на эту ось запишется следующим образом:

$$m_3 v_0 = (m_1 + m_2 + m_3)v_c.$$

Следовательно,

$$v_c = \frac{1}{6}v_0.$$

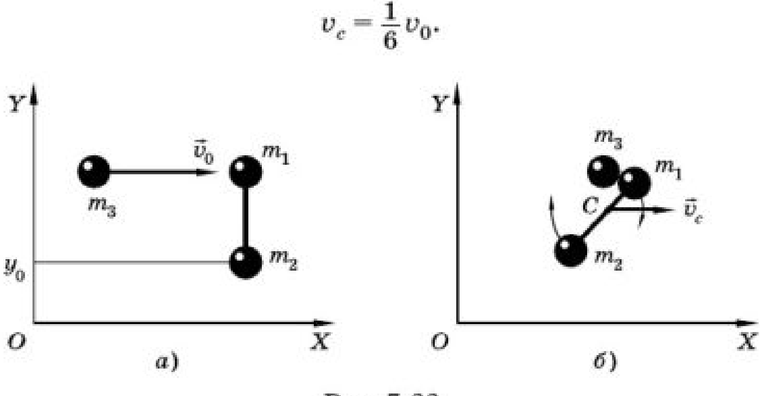


Рис. 7.22

Положение центра масс определяется по формуле (7.3.4):

$$y_c = \frac{(m_1 + m_3)(l + y_0) + m_2 y_0}{m_1 + m_2 + m_3} = y_0 + \frac{2}{3}l,$$

где y_0 — координата второго шарика до начала движения гантельки (см. рис. 7.22, *а*). Центр масс находится на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от второго шарика.

Задача 3

Два одинаковых шарика массой m лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе и соединены невесомой пружиной с жёсткостью k и длиной l. Третий шарик такой же массы движется со скоростью $\vec{v}_0$ по линии, соединяющей центры первых двух шариков (рис. 7.23), и упруго сталкивается с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении.

Решение. Так как массы шариков одинаковы, то первоначально двигавшийся шарик после центрального упругого удара останавливается (см. § 6.8), а шарик, с которым он столкнулся, приобретает скорость $\vec{v}_0$.

Дальнейшее движение системы происходит так: центр масс движется прямолинейно и равномерно, а шарики совершают колебания относительно центра масс.

Скорость центра масс определим по закону сохранения импульса:

$$m\vec{v}_0 = 2m\vec{v}_c.$$

Отсюда видно, что скорость центра масс направлена в ту же сторону, что и скорость $\vec{v}_0$.

В проекциях на ось X закон сохранения импульса запишется так:

$$mv_0 = 2mv_c, \ v_c = \frac{1}{2}v_0.$$

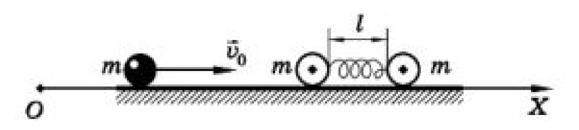


Рис. 7.23

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии.

Шарики движутся (колеблются) относительно центра масс. В моменты максимального и минимального растяжения пружины их скорости относительно центра масс равны нулю и кинетическая энергия системы равна

$$E_k = \frac{2mv_c^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4}.$$

Полная энергия системы равна кинетической энергии третьего шарика до соударения:

$$E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Следовательно, энергия деформированной пружины (потенциальная энергия) как при максимальном расстоянии между шариками, так и при минимальном, согласно закону сохранения энергии, равна

$$E_p = E - E_k = \frac{mv_0^2}{4} = \frac{k|\Delta l|^2}{2},$$

где $|\Delta l|$ — модуль деформации пружины.

Пружина при этом сжата (или растянута) на величину

$$|\Delta l| = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Таким образом,

$$l_{\max} = l + |\Delta l| = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}},\ l_{\min} = l - |\Delta l| = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Упражнение 13

1. Сообщающиеся сосуды одинакового размера укреплены неподвижно на тележке, которая может перемещаться по горизонтальной поверхности без трения (рис. 7.24). При закрытом кране в левый сосуд налита вода. Какое движение начнёт совершать тележка в первый момент после открытия крана? Где окажется тележка, когда её движение прекратится? Массой сосудов и тележки по сравнению с массой воды можно пренебречь.

2. Два одинаковых груза соединены пружиной. В начальный момент пружина сжата так, что первый груз вплотную прижат к стене (рис. 7.25), а второй груз удерживается упором. Опишите качественно движение системы

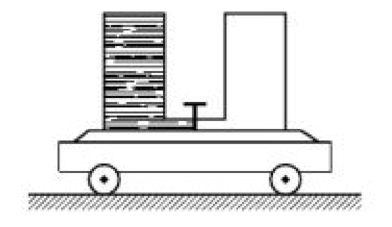


Рис. 7.24

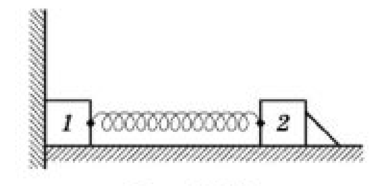


Рис. 7.25

грузов, которое они будут совершать, если убрать упор. Трение не учитывать.

3. На закреплённый в вертикальном положении болт навинчена однородная пластинка (рис. 7.26). Пластинку раскрутили так, что она свинчивается с болта. Трение считать пренебрежимо малым. Как будет двигаться пластинка, когда она, покинув болт, начнёт свободно падать?

4. На прямоугольный клин ABC массой M, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший по размерам клин BED массой m (рис. 7.27). Определите, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнёт вниз и точка D совместится с точкой C. Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b.

5. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какие траектории будут описывать жук и центр обруча, если жук начнёт двигаться вдоль обруча? Масса обруча M и радиус R, масса жука m.

6. Для создания искусственной силы тяжести на пассивном участке полёта две части космического корабля (отношение масс 1 : 2) развели на расстояние L между центрами масс частей и раскрутили вокруг общего центра масс.

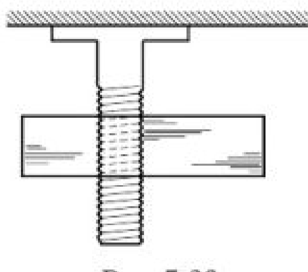


Рис. 7.26

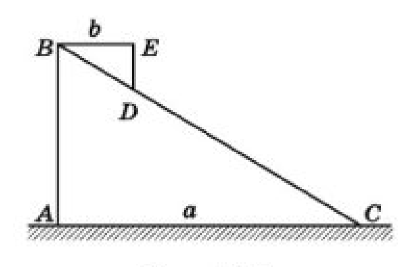


Рис. 7.27

Определите период вращения, если искусственная сила тяжести, действующая на все тела в более массивной части корабля, в два раза меньше силы тяжести на Земле.

7. Космонавт массой m приближается к космическому кораблю массой M с помощью троса, длина которого L. На какие расстояния l_m и l_M переместятся космонавт и корабль до сближения?

8. На нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, подвешены два груза массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Найдите ускорение центра масс этой системы.

9. На концах и в середине невесомого стержня длиной l укреплены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между полом и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную плоскость.

10. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Кубики соединены пружиной жёсткостью k. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0. На правый кубик начинает действовать постоянная горизонтальная сила $\vec{F}$ (рис. 7.28). Найдите минимальное и максимальное расстояния между кубиками при движении системы.

11. Внутри сферы массой M и радиусом R находится небольшой шарик массой m. При отсутствии внешних сил шарик движется по экватору внутренней оболочки сферы. Период его обращения равен T. Найдите силу давления шарика на поверхность сферы.

12. Две взаимодействующие между собой частицы образуют замкнутую систему, центр масс которой покоится. На рисунке 7.29 показаны положения обеих частиц в некоторый момент времени и траектория частицы массой m_1. Постройте траекторию частицы массой m_2, если $m_2 = \frac{1}{2} m_1$.

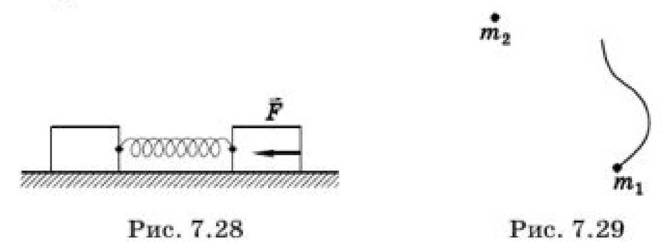


Рис. 7.28 Рис. 7.29

§ 7.6. ДРУГАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

Прежде чем перейти к изучению вращательного движения твёрдого тела, рассмотрим новую форму записи уравнения движения материальной точки по окружности. Введём новые понятия: момент инерции, момент силы и момент импульса. Именно с помощью этих понятий можно записать уравнение движения твёрдого тела при его вращении вокруг оси.

При рассмотрении кинематики движения точки по окружности (см. § 27 гл. 1) было установлено, что ускорение точки $\vec{a}$ целесообразно разложить на нормальную $\vec{a}_n$ и тангенциальную $\vec{a}_\tau$ составляющие, модули которых соответственно равны

$$a_n = \omega^2 R,\ a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальная составляющая характеризует изменение скорости только по направлению, а тангенциальная — только по модулю. Соответственно второй закон Ньютона для проекций a_n и a_τ ускорения запишется так:

$$ma_n = F_n,\ ma_\tau = F_\tau,$$

где F_n — проекция силы на направление, перпендикулярное скорости, а F_τ — проекция силы на направление скорости.

Второе из этих уравнений перепишем, используя связь тангенциального a_τ и углового β ускорений ($a_\tau = \beta R$):

$$mR\beta = F_\tau. \qquad (7.6.1)$$

Момент силы

Пусть к материальной точке приложена сила, действующая в плоскости движения.

Угловое ускорение, как это следует из уравнения (7.6.1), определяется тангенциальной составляющей силы $\vec{F}$. Например, силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (рис. 7.30) создают одно и то же ускорение β, так как для них составляющие $\vec{F}_\tau$ одинаковы.

Обозначим через α угол между вектором силы $\vec{F}$ и радиусом-вектором $\vec{R}$ рассматриваемой материальной точки.

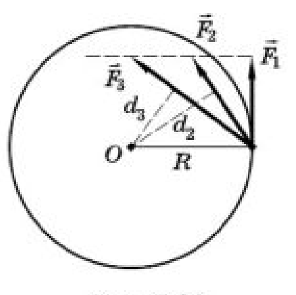


Рис. 7.30

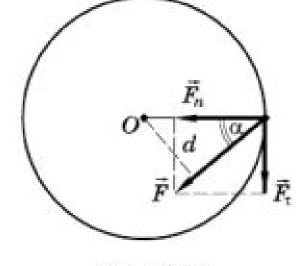


Рис. 7.31

Тогда

$$F_\tau = F \sin \alpha. \quad (7.6.2)$$

Назовём расстояние d между центром окружности O и линией действия силы плечом силы. Из рисунка 7.31 видно, что

$$d = R \sin \alpha. \quad (7.6.3)$$

В частности, для силы $\vec{F}_1$ (см. рис. 7.30) угол $\alpha = 90°$ и, следовательно, $d_1 = R$, т. е. плечо силы равно радиусу окружности.

Произведение модуля F_τ тангенциальной составляющей на радиус R назовём моментом силы и обозначим буквой M.

Из формул (7.6.2) и (7.6.3) следует, что

$$M = F_\tau R = FR \sin \alpha = Fd. \quad (7.6.4)$$

Запишем уравнение (7.6.1) в другой форме, используя понятие момента силы. Для этого умножим левую и правую части этого уравнения на R. На основании равенства (7.6.4) получим

$$mR^2\beta = M. \quad (7.6.5)$$

Таким образом, при постоянных значениях m и R момент силы определяет угловое ускорение.

Однако с таким же успехом при заданном R угловое ускорение может определяться величинами $F_\tau R^2$, $F_\tau R^3$ и т. д. Поэтому возникает вопрос о том, почему мы выбираем в качестве характеристики силового воздействия именно момент силы $M = F_\tau R$, а не какую-либо другую комбинацию величин F_τ, R. Причина такого выбора состоит в следующем.

Сравним движение материальной точки по окружности с прямолинейным движением. Между кинематическими ха-

рактеристиками в этих случаях имеется следующее соответствие: линейному перемещению Δs соответствует угловое перемещение $\Delta\varphi$, линейной скорости υ — угловая скорость ω, линейному ускорению a — угловое ускорение β.

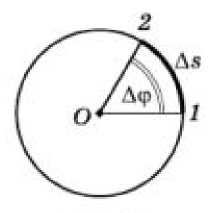


Рис. 7.32

Каково же будет соответствие между динамическими характеристиками? Начнём с силы. Рассмотрим выражение для работы. При движении по окружности работа совершается тангенциальной составляющей $\vec{F}_\tau$ силы. Нормальная составляющая не совершает работы.

Таким образом, при перемещении по окружности на малое расстояние Δs (рис. 7.32) совершается элементарная работа:

$$\Delta A = F_\tau \Delta s. \qquad (7.6.6)$$

Введём вместо линейной характеристики перемещения Δs угловое $\Delta\varphi$. Они связаны равенством $\Delta s = R\Delta\varphi$.

Используя это соотношение, перепишем выражение (7.6.6) в виде

$$\Delta A = F_\tau R\Delta\varphi = M\Delta\varphi. \qquad (7.6.7)$$

Отсюда следует, что если вместо линейного перемещения использовать угловое, то роль силы будет играть величина $F_\tau R$, т. е. момент силы M.

Знак момента силы

В определении момента силы (7.6.4) не учтено, что сила имеет направление и может как увеличивать угловую скорость, так и уменьшать её. Это обстоятельство можно учесть так. Будем считать одно из направлений обращения точки, например против движения часовой стрелки, положительным. Тогда моменту силы условимся приписывать знак «плюс», если сила увеличивает скорость обращения точки в направлении против часовой стрелки, и знак «минус» в противоположном случае.

Момент инерции

Мы установили, что при описании движения по окружности вместо величин r, υ, a, F удобнее использовать величины φ, ω, β, M. Какая же величина соответствует массе? Из уравнения (7.6.5) видно, что роль массы при движении по

окружности играет величина mR^2. Назовём её **моментом инерции** и обозначим буквой J:

$$\boxed{J = mR^2.} \tag{7.6.8}$$

Используя это обозначение, запишем уравнение движения материальной точки по окружности в форме

$$\boxed{J\beta = M.} \tag{7.6.9}$$

Итак, мерой инертности при движении материальной точки по окружности служит момент инерции. То, что инертность при движении по окружности зависит от радиуса, легко почувствовать. Например, камень на длинной верёвке раскрутить труднее, чем на короткой.

Подчеркнём ещё раз, что исходное уравнение движения $ma_\tau = F_\tau$ и уравнение (7.6.9) эквивалентны. Использование того или иного из них при описании движения материальной точки определяется соображениями удобства и простоты.

Момент импульса

В главе 2, посвящённой второму закону Ньютона, были рассмотрены две формы записи уравнения движения:

$$m\vec{a} = F; \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \tag{7.6.10}$$

Из второго уравнения (7.6.10) следует, что изменение вектора импульса $m\vec{v}$ определяется импульсом силы $\vec{F}dt$. Такая форма записи очень удобна при решении многих задач.

Запишем в соответствующем виде уравнение движения материальной точки по окружности. Для этого преобразуем левую часть уравнения (7.6.9).

По определению угловое ускорение $\beta = \frac{d\omega}{dt}$. Учитывая, что момент инерции материальной точки $J = mR^2$ не зависит от времени, можем записать:

$$J\beta = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt}. \tag{7.6.11}$$

Выясним физический смысл величины $J\omega$. Перепишем это выражение в иной форме. Так как $J = mR^2$ и $R\omega = v$, то

$$J\omega = mvR. \tag{7.6.12}$$

Выражение mvR естественно назвать **моментом импульса**.

Используя равенство (7.6.11), уравнение (7.6.9) можем записать в виде

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = M, \text{ или } d(J\omega) = Mdt. \qquad (7.6.13)$$

Приходим к выводу: **изменение момента импульса определяется импульсом момента силы,** т. е. величиной Mdt.

Для момента импульса будем использовать специальное обозначение $J\omega = L$. Тогда уравнение (7.6.13) примет вид

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = M,} \qquad (7.6.14)$$

где $L = J\omega = mvR$ — момент импульса. Скоро мы увидим, что момент импульса, подобно импульсу, сохраняется в замкнутых системах.

Для динамического описания движения материальной точки по окружности мы ввели новые величины: момент силы, момент инерции и момент импульса. Был записан второй закон Ньютона в новой форме. Эта форма чрезвычайно удобна для перехода к динамике вращательного движения твёрдого тела.

§ 7.7. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Твёрдое тело можно представить как совокупность материальных точек. При вращении тела все эти точки имеют одинаковые угловые скорости и ускорения. Используя результаты § 7.6, сравнительно несложно получить уравнение движения твёрдого тела при его вращении вокруг неподвижной оси.

Уравнение движения

Для вывода основного уравнения динамики вращательного движения можно поступить следующим образом. Разделить мысленно тело на отдельные, достаточно малые элементы, которые можно было бы рассматривать как матери-

альные точки (рис. 7.33). Записать для каждого элемента уравнение (7.6.13) и все эти уравнения почленно сложить. При этом внутренние силы, действующие между отдельными элементами, в уравнение движения тела не войдут. Сумма их моментов в результате сложения уравнений окажется равной нулю, так как по третьему закону Ньютона силы взаимодействия равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Учитывая далее, что при вращении твёрдого тела все его точки совершают одинаковые угловые перемещения с одинаковыми скоростями и ускорениями, можно таким образом получить уравнение вращательного движения всего тела.

Однако вывод этого уравнения довольно громоздок, поэтому мы на нём останавливаться не будем. Тем более что это уравнение имеет такую же форму, что и уравнение (7.6.13) для материальной точки, движущейся по окружности:

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = M. \qquad (7.7.1)$$

В этом уравнении $J\omega = L$ — момент импульса тела, а $M = \sum_i M_i$ — суммарный момент всех внешних сил, действующих на тело относительно оси вращения.

Читается уравнение (7.7.1) так: **производная по времени от момента импульса равна суммарному моменту внешних сил.**

Следует иметь в виду, что вращение тела вокруг оси могут вызывать лишь силы $\vec{F}_i$, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 7.34). Силы же $\vec{F}_k$, направленные параллельно оси вращения, очевидно, способны вызвать

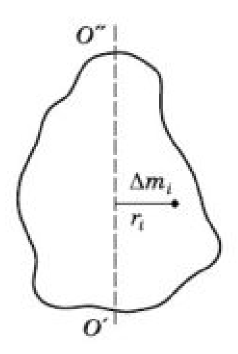


Рис. 7.33

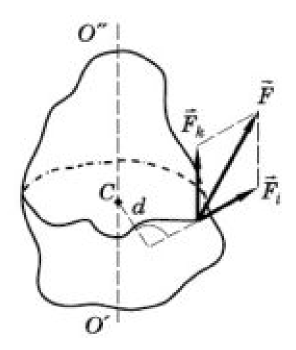


Рис. 7.34

лишь перемещение тела вдоль оси. Момент каждой силы $\vec{F}_i$ равен взятому со знаком «плюс» или «минус» произведению модуля этой силы на плечо d, т. е. на длину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки C оси на линию действия силы $\vec{F}_i$:

$$M_i = \pm F_i d. \qquad (7.7.2)$$

Момент силы, вращающий тело вокруг данной оси против часовой стрелки, считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным.

Момент инерции тела

В формулу (7.7.1) входит момент инерции тела J. Момент инерции тела J равен сумме моментов инерции ΔJ_i отдельных малых элементов, на которые можно разбить всё тело:

$$J = \sum_i \Delta J_i. \qquad (7.7.3)$$

Так как момент инерции материальной точки

$$\Delta J_i = \Delta m_i r_i^2, \qquad (7.7.4)$$

где Δm_i — масса элемента тела, а r_i — его расстояние до оси вращения (см. рис. 7.33), то

$$J = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2. \qquad (7.7.5)$$

Момент инерции тела зависит не только от массы тела, но и от характера распределения этой массы. Так, из двух тонкостенных сфер одинаковой массы бóльшим моментом инерции относительно оси, проходящей через центр сферы, обладает сфера большего радиуса. Очевидно также, что, изменив ось вращения тела, мы тем самым изменим и его момент инерции. У твёрдых тел момент инерции относительно данной оси — постоянная величина. Поэтому изменение момента импульса может происходить лишь за счёт изменения угловой скорости. Соответственно уравнение (7.7.1) можно записать в виде

$$J\frac{d\omega}{dt} = M. \qquad (7.7.6)$$

Читается это уравнение так: **произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение тела равно сумме моментов (относительно той же оси) всех внешних сил, приложенных к телу.**

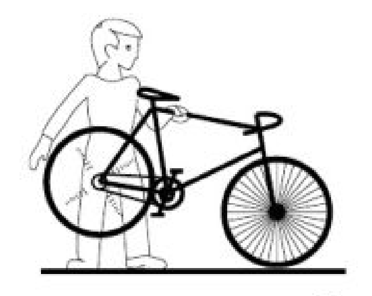
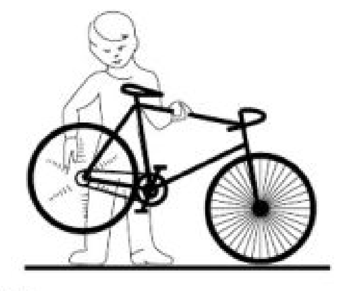



Рис. 7.35

Уравнение (7.7.6) показывает, что при вращении тела момент инерции играет роль массы, момент силы — роль силы, а угловое ускорение — роль линейного ускорения при движении материальной точки или центра масс.

В том, что угловое ускорение определяется действительно моментом силы, т. е. силой и плечом, а не просто силой, убедиться нетрудно. Так, раскрутить велосипедное колесо до одной и той же угловой скорости одной и той же силой (например, усилием пальца) можно гораздо быстрее, если прикладывать силу к ободу колеса (это создаёт больший момент), а не к спицам вблизи втулки (рис. 7.35).

Для того чтобы убедиться в том, что угловое ускорение определяется именно моментом инерции, а не массой тела, нужно иметь в распоряжении тело, форму которого можно легко изменять, не меняя массы. Велосипедное колесо здесь непригодно. Но можно воспользоваться своим собственным телом. Попробуйте закрутиться на пятке, оттолкнувшись от пола другой ногой. Если вы при этом прижмёте руки к груди, то угловая скорость окажется большей, чем если вы раскинете руки в стороны. Эффект будет особенно заметным, если в обе руки взять по толстой книге.

Моменты инерции обруча и цилиндра

Найти момент инерции тела произвольной несимметричной формы довольно сложно. Проще его измерить опытным путём, чем вычислить.

Мы ограничимся вычислением момента инерции тонкого обруча, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр. Если масса колеса сосредоточена главным образом в его ободе (как, например, у велосипедного колеса), то такое колесо приближённо можно рассматривать как обруч, пренебрегая массой спиц и втулки.

Разобьём обруч на N одинаковых элементов. Если m — масса всего обруча, то масса каждого элемента $\Delta m_i = \frac{m}{N}$. Толщину обруча будем считать много меньшей его радиуса (рис. 7.36). Если число элементов выбрать достаточно большим, то каждый элемент можно рассматривать как материальную точку. Поэтому момент инерции произвольного элемента с номером i будет равен

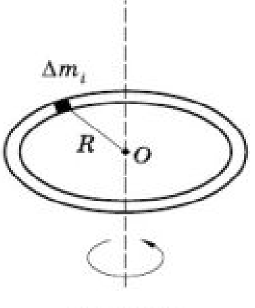


Рис. 7.36

$$\Delta J_i = \Delta m_i R^2. \qquad (7.7.7)$$

Подставляя выражение (7.7.7) в формулу (7.7.5) для полного момента инерции, получим

$$J = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R^2 = mR^2. \qquad (7.7.8)$$

Здесь мы учли, что расстояние R для всех элементов одинаково и что сумма масс элементов $\sum_i \Delta m_i$ равна массе m обруча.

Получился очень простой результат: момент инерции обруча равен произведению его массы на квадрат радиуса. Момент инерции обруча данной массы тем больше, чем больше его радиус. Формула (7.7.8) определяет также момент инерции полого тонкостенного цилиндра при его вращении вокруг оси симметрии.

Вычисление момента инерции сплошного однородного цилиндра массой m и радиусом R относительно его оси симметрии представляет более сложную задачу. Мы приведём лишь результат расчёта:

$$J = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (7.7.9)$$

Следовательно, если сравнить моменты инерции двух цилиндров одинакового размера и массы, один из которых полый, а другой сплошной, то у второго цилиндра момент инерции будет в два раза меньше. Это связано с тем, что у сплошного цилиндра масса расположена в среднем ближе к оси вращения.

Мы познакомились с уравнением вращательного движения твёрдого тела. По форме оно похоже на уравнение

для поступательного движения твёрдого тела. Дано определение новых физических величин, характеризующих твёрдое тело: момента инерции и момента импульса.

? Найдите аналогии в уравнениях вращательного и поступательного движения твёрдого тела (результат представьте в виде таблицы).

§ 7.8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Поступательное и вращательное движения твёрдого тела мы изучали по отдельности. Рассмотрим теперь плоское (или плоскопараллельное) движение, кинематика которого исследовалась в § 7.1. Плоское движение можно рассматривать как вращательное движение вокруг оси, которая перемещается поступательно. Примером плоского движения служит качение колеса.

Наиболее удобным оказывается такой способ описания плоского движения, при котором качение колеса рассматривается как сложение его поступательного движения и вращения относительно центра масс колеса. То же самое имеет место и при произвольном плоском движении.

Для описания плоского движения достаточно записать уравнение движения его центра масс и уравнение для вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$m\frac{dv_c}{dt} = F, \ J\frac{d\omega}{dt} = M. \qquad (7.8.1)$$

Первое уравнение описывает поступательное движение тела. Если бы не было вращения, то все точки тела перемещались бы так же, как и центр масс. При отсутствии поступательного движения второе уравнение описывало бы вращение тела вокруг неподвижной оси.

В качестве примера применения уравнений плоского движения (7.8.1) рассмотрим качение цилиндра. На рисунке 7.37 изображён сплошной цилиндр. К оси цилиндра O_1O_2 прикреплена рамка, на которую действует сила $\vec{F}$. Кроме силы $\vec{F}$, на цилиндр действуют ещё такие силы: сила тяжести $\vec{F}_т$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}$. Так как уско-

рение вдоль вертикали отсутствует, то силы $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$ взаимно уравновешиваются.

Запишем первое уравнение системы (7.8.1) для движения центра масс:

$$ma_c = F - f. \qquad (7.8.2)$$

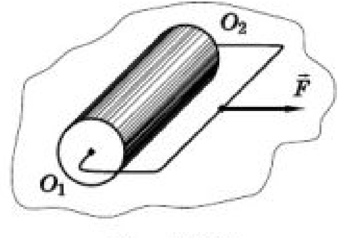


Рис. 7.37

Все силы, кроме силы трения f, имеют относительно оси цилиндра плечо, равное нулю[1]. Момент силы трения $M = fR$, где R — радиус цилиндра. Поэтому уравнение вращательного движения имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = fR, \text{ или } J\beta = fR. \qquad (7.8.3)$$

При качении цилиндра без проскальзывания линейная и угловая скорости связаны равенством

$$\upsilon_c = \omega R. \qquad (7.8.4)$$

Если $R = \text{const}$, то так же связаны ускорения:

$$a_c = \beta R. \qquad (7.8.5)$$

Следовательно, мы имеем три уравнения — (7.8.2), (7.8.3), (7.8.5) — для определения трёх неизвестных a_c, β, f.

Найдём силу трения. Исключая угловое ускорение β из уравнений (7.8.3) и (7.8.5), получим

$$a_c = f\frac{R^2}{J}. \qquad (7.8.6)$$

Далее из уравнений (7.8.2) и (7.8.6) исключим ускорение a_c.

Сила трения равна

$$f = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{J}}. \qquad (7.8.7)$$

---

[1] В системе отсчёта, связанной с движущейся осью цилиндра O_1O_2, на все элементы цилиндра действуют силы инерции $\vec{F}_i = -\Delta m_i \vec{a}_c$. Но суммарный момент этих сил для однородного цилиндра относительно его оси равен нулю.

Для сплошного цилиндра $J = \frac{1}{2}mR^2$, и сила трения оказывается равной

$$f_1 = \frac{1}{3}F. \qquad (7.8.8)$$

Если цилиндр полый, то $J = mR^2$ и $f_2 = \frac{1}{2}F$. Для полого цилиндра сила трения больше, чем для сплошного. Но, разумеется, она меньше максимальной силы трения покоя. Зная силу трения, легко найти ускорение центра масс по формуле (7.8.6).

Плоское движение описывается с помощью двух уравнений движения и одного кинематического соотношения, связывающего угловое ускорение с ускорением центра масс.

§ 7.9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В механике, как мы уже говорили, имеется три закона сохранения: импульса, энергии и момента импульса. Все они являются следствиями законов движения. Мы не будем столь же детально рассматривать закон сохранения момента импульса, как два других закона сохранения. Ограничимся лишь простыми частными случаями.

Если при вращении тела вокруг неподвижной оси момент внешних сил относительно этой оси равен нулю, то, согласно уравнению (7.7.1), равна нулю производная момента импульса тела:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = 0. \qquad (7.9.1)$$

Это означает, что сам момент импульса остаётся постоянным:

$$J\omega = \text{const}. \qquad (7.9.2)$$

Из неизменности момента инерции J твёрдого тела, вращающегося вокруг определённой оси, следует постоянство угловой скорости вращения. Так, если бы не было трения, то не менялась бы угловая скорость вращающегося на оси колеса.

Уравнение (7.9.2) и является формой записи закона сохранения момента импульса для частного случая вращения тела вокруг неподвижной оси. В общем виде этот закон формулируется так: **в замкнутой системе тел полный (суммарный) момент импульса остаётся постоянным.**

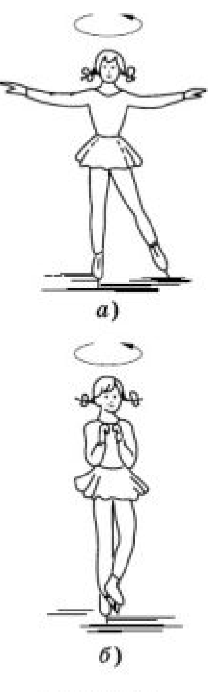


Рис. 7.38

Если момент внешней силы, действующей на тело, равен нулю, то уравнение (7.9.2) выполняется и в том случае, когда тело не является твёрдым, т. е. когда момент его инерции может изменяться. Причём в этом случае закон сохранения момента импульса позволяет простым путём получить важные заключения о характере вращения тела.

Все вы могли видеть, как балерина или спортсмен-фигурист легко меняет скорость своего вращения, не отталкиваясь от пола или льда. На рисунке 7.38, *а* изображена фигуристка, которая, оттолкнувшись ото льда, вращается с угловой скоростью ω_0. Затем она изменяет положение тела: выпрямляется и прижимает руки к корпусу (рис. 7.38, *б*). Легко заметить, что угловая скорость её при этом заметно увеличивается и становится равной некоторому значению $\omega_1 > \omega_0$. Докажем, что это изменение скорости есть следствие закона сохранения момента импульса (7.9.2). Обозначим через J_0 и J_1 моменты инерции фигуристки в начальном (сразу после толчка) и конечном состояниях. Момент инерции в конечном состоянии, когда фигуристка выпрямляется и прижимает руки к корпусу, меньше момента инерции J_0, так как её масса сосредоточивается ближе к оси вращения. После толчка момент внешних сил становится равным нулю, если пренебречь трением, и поэтому момент импульса должен сохраняться. На этом основании можно написать, что

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1. \qquad (7.9.3)$$

Так как $J_1 < J_0$, то отсюда вытекает неравенство

$$\omega_1 = \frac{J_0}{J_1}\omega_0 > \omega_0. \qquad (7.9.4)$$

То же явление можно наблюдать по-другому. Человек становится на круглую платформу, которая может вращаться вокруг вертикальной оси без заметного трения. Оттолкнувшись затем от пола, он начинает вращаться. Меняя далее положение рук (лучше с тяжёлыми предметами в ладонях), т. е. меняя момент инерции тела, человек тем самым меняет и угловую скорость вращения (рис. 7.39).

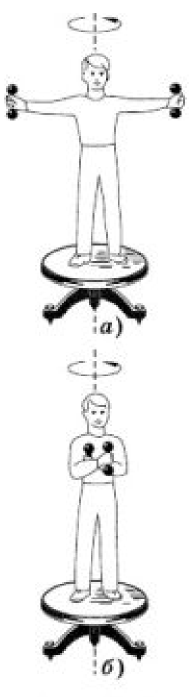


Рис. 7.39

Мы познакомились с третьим законом сохранения в механике — законом сохранения момента импульса. Он выполняется во всех без исключения случаях, как и закон сохранения импульса.

? Человек на вращающейся платформе прижимает руки к груди (см. рис. 7.39). Как при этом изменяется угловая скорость вращения?

§ 7.10. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

На краю горизонтальной платформы массой m и радиусом R, которая может свободно вращаться относительно оси $O'O''$, закреплена небольшая пушка (рис. 7.40). Платформа вначале покоится. Затем из пушки производится выстрел. Снаряд летит по касательной к краю платформы со скоростью $\vec{v}$. Масса снаряда $m_с$, масса пушки $m_п$. Определите угловую скорость платформы после выстрела. Пушку и снаряд можно рассматривать как материальные точки.

Решение. До выстрела момент внешних сил, действующих на пушку и платформу, равен нулю. Он равен нулю и после выстрела, так как при выстреле между пушкой и снарядом действуют лишь внутренние силы, суммарный момент которых равен нулю. Вследствие этого суммарный момент импульса снаряда, пушки и платформы остаётся неизменным. До выстрела он был равен нулю. Следовательно, он будет равняться нулю и после выстрела. Это означает, что момент импульса, которым обладает снаряд, равен по модулю и противоположен по знаку моменту импульса платформы и пушки.

Момент импульса снаряда равен произведению импульса снаряда $m_c v$ на плечо, т. е. $m_c vR$. Момент импульса платформы и пушки состоит из двух частей: момента импульса пушки $m_п R^2\omega$ и момента импульса платформы $\frac{1}{2}mR^2\omega$ (здесь учтено, что пушка рассматривается как материальная точка; для момента инерции платформы использована формула (7.7.3).

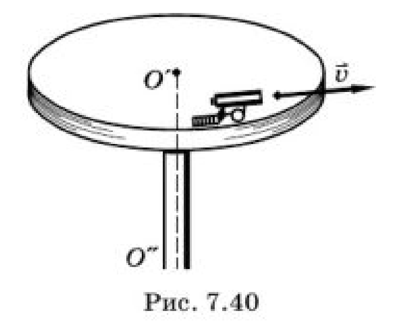


Рис. 7.40

Учитывая, что момент импульса снаряда равен по модулю суммарному моменту импульса пушки и платформы, получим равенство

$$m_c vR = m_п R^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega.$$

Отсюда находим угловую скорость вращения:

$$\omega = \frac{m_c v}{\left(m_п + \frac{1}{2}m\right)R}.$$

Задача 2

Через блок, представляющий собой сплошной диск радиусом R, перекинута нить. На нити подвешены грузы массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Масса блока m (рис. 7.41). Определите разность сил натяжения нитей с обеих сторон блока и ускорение грузов. Считать, что нить нерастяжима и не может скользить по блоку.

Решение. Обозначим силы натяжения нитей через $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$, ускорения грузов через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Направим ось координат по вертикали снизу вверх. Запишем уравнения движения грузов:

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g;$$
$$-m_2 a_2 = T_2 - m_2 g. \qquad (7.10.1)$$

Нить нерастяжима, поэтому ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ равны по модулю: $a_1 = a_2$.

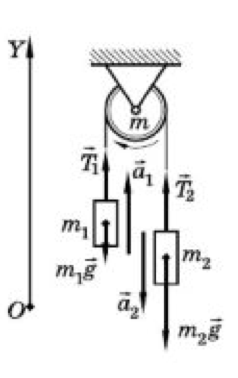


Рис. 7.41

Исключая с помощью этого условия ускорение a_2 из второго уравнения движения, получим

$$m_1a_1 = T_1 - m_1g; \; m_2a_1 = m_2g - T_2. \qquad (7.10.2)$$

Чтобы получить уравнение, содержащее разность сил натяжения нитей, сложим уравнения (7.10.2):

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_2 - m_1)g - (T_2 - T_1). \qquad (7.10.3)$$

Теперь рассмотрим уравнение вращательного движения блока. Учитывая, что моменты, создаваемые силами $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$, имеют противоположные знаки, получим уравнение

$$J\beta = (T_2 - T_1)R, \qquad (7.10.4)$$

где J — момент инерции блока, β — его угловое ускорение.

Угловое и линейное ускорения связаны соотношением $a_1 = \beta R$, поэтому уравнение (7.10.4) можно записать так:

$$\frac{J}{R^2}a_1 = T_2 - T_1. \qquad (7.10.5)$$

Из уравнений (7.10.3) и (7.10.5) находим искомые величины:

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}g, \qquad (7.10.6)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)R^2 + J}Jg. \qquad (7.10.7)$$

Так как по условию $m_2 > m_1$, то $a_1 > 0$, т. е. ускорение первого груза направлено вверх, а второго — вниз. Из выражения (7.10.7) следует, что $T_2 > T_1$. Это понятно, так как диск поворачивается по часовой стрелке.

Если момент инерции блока настолько мал, что выполняется условие

$$J \ll (m_1 + m_2)R^2,$$

то, как это следует из формулы (7.10.7),

$$T_2 - T_1 \ll (m_2 - m_1)g,$$

т. е. разность сил натяжения нитей много меньше силы $(m_2 - m_1)g$.

Если пренебречь моментом инерции блока ($J = 0$; невесомый блок), то из выражений (7.10.6) и (7.10.7) следует:

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}g; \; T_2 = T_1.$$

Таким образом, в случае невесомого блока натяжение нитей оказывается равным (см. задачу 5 § 2.14).

Упражнение 14

1. Докажите, что кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J — момент инерции, а ω — угловая скорость.

2. Сплошной цилиндр радиусом R и массой m скатывается с наклонной плоскости с углом α. Определите ускорение центра масс цилиндра и силу трения.

3. Горизонтальная платформа, представляющая собой диск массой m и радиусом R, вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через её центр. На краю платформы стоит человек массой m_1. С какой скоростью ω_1 будет вращаться платформа, если человек перейдёт от края платформы к её центру? Человека можно рассматривать как материальную точку.

4. На барабан с горизонтальной осью вращения радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 10$ кг. Найдите момент инерции барабана, если известно, что угловое ускорение $\beta = 2$ рад/с^2. Трением пренебречь.

5. Через блок массой $m = 10$ г перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 10$ г и $m_2 = 15$ г. С каким ускорением движутся грузы? Блок считать сплошным диском.

---

1. Одинаково ли понимание термина «теорема» в математике и физике? Аргументируйте на примерах теоремы о движении центра масс (физика) и теоремы Пифагора (математика).

2. Просмотрите видеорепортаж с соревнований по фигурному катанию. Найдите проявления законов динамики вращательного движения.

Глава 8

СТАТИКА

До сих пор мы рассматривали разнообразные движения тел, их взаимодействия, вследствие которых у этих тел возникают ускорения. В этой главе мы займёмся изучением условий, при которых тела под действием приложенных к ним сил не получают ускорений или, в частности, находятся в состоянии покоя.

§ 8.1. РАВНОВЕСИЕ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Выясним, что представляет собой раздел механики, называемый статикой.

Статика

Сумма сил, приложенных к телу, может быть отличной от нуля или же равной нулю. В зависимости от этого скорость тела изменяется или же остаётся постоянной. В последнем случае тела будут находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно. Здания, мосты, балки вместе с опорами, части машин, книга на столе и многие другие тела покоятся, несмотря на то что на них со стороны других тел действуют силы.

Если тело, к которому приложены силы, покоится, то говорят, что это тело находится в равновесии. Изучение условий равновесия тел имеет большое практическое значение в строительном деле, машиностроении, приборостроении и других областях техники.

Но выяснить условия равновесия реальных тел непросто, так как все реальные тела под влиянием приложенных к ним сил изменяют свою форму и размеры, или, как говорят, деформируются. А деформации существенно влияют на равновесие тел. Величина деформации зависит от различных условий: материала тела, его формы, модулей и направлений приложенных к телу сил. Деформации могут быть значительными, и тогда их легко заметить, например растяжение резинового шнура, изгиб тонкой металлической линейки и т. д. Малые деформации можно обнаружить с помощью специальных приборов.

Во многих случаях, которые имеют место на практике, деформациями можно пренебречь и вести расчёт так, как если бы тела были недеформируемыми, т. е. абсолютно твёрдыми (см. § 7.1).

Изучив условия равновесия абсолютно твёрдого тела, мы тем самым найдём условия равновесия реальных тел в тех случаях, когда их деформациями можно пренебречь.

Раздел механики, в котором изучается равновесие абсолютно твёрдых тел, называется статикой.

В статике учитываются размеры и формы тел и все рассматриваемые тела считаются абсолютно твёрдыми. Статика является частным случаем динамики, так как покой тел, когда на них действуют силы, есть частный случай движения.

Деформации тел учитываются в прикладных разделах механики: теории упругости, сопротивлении материалов.

В статике изучается равновесие твёрдых тел. Статика является частным случаем динамики.

? Докажите, что статика является частным случаем динамики.

§ 8.2. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Выясним, при каких условиях тела находятся в равновесии.

Первое условие равновесия

Очевидно, что тело может покоиться только по отношению к одной определённой системе координат. В статике изучают условия равновесия тел именно в такой системе. При равновесии скорости и ускорения всех участков (элементов) тела

равны нулю. Учитывая это, можно установить одно из необходимых условий равновесия тел, используя теорему о движении центра масс (см. § 7.4).

Внутренние силы не влияют на движение центра масс, так как их сумма всегда равна нулю. Определяют движение центра масс тела (или системы тел) лишь внешние силы. Так как при равновесии тела ускорение всех его элементов равно нулю, то равно нулю и ускорение центра масс. Но ускорение центра масс определяется векторной суммой внешних сил, приложенных к телу (см. формулу (7.4.2)). Поэтому при равновесии эта сумма должна равняться нулю.

Действительно, если сумма внешних сил $\vec{F}_i$ равна нулю, то и ускорение центра масс $a_c = 0$. Отсюда следует, что скорость центра масс $\vec{v}_c = \text{const}$. Если в начальный момент скорость центра масс равнялась нулю, то и в дальнейшем центр масс остаётся в покое.

Полученное условие неподвижности центра масс является необходимым (но, как мы скоро увидим, недостаточным) условием равновесия твёрдого тела. Это так называемое *первое условие равновесия*. Его можно сформулировать следующим образом.

Для равновесия тела необходимо, чтобы сумма внешних сил, приложенных к телу, была равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \tag{8.2.1}$$

Если сумма сил равна нулю, то равна нулю и сумма проекций сил на все три оси координат. Обозначая внешние силы через $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и т. д., получим три уравнения, эквивалентных одному векторному уравнению (8.2.1):

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots = 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots = 0, \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots = 0. \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

Для того чтобы тело покоилось, необходимо ещё, чтобы начальная скорость центра масс была равна нулю.

Второе условие равновесия твёрдого тела

Равенство нулю суммы внешних сил, действующих на тело, необходимо для равновесия, но недостаточно. При выполнении этого условия лишь центр масс с необходимостью будет покоиться. В этом нетрудно убедиться.

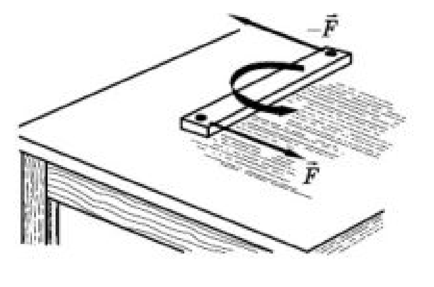



Рис. 8.1

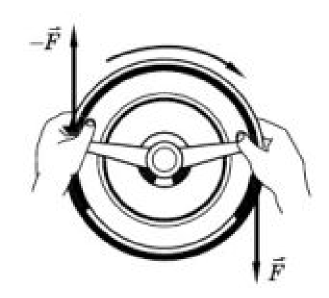


Рис. 8.2

Приложим к доске в разных точках равные по модулю и противоположные по направлению силы так, как показано на рисунке 8.1 (две такие силы называют п а р о й с и л). Сумма этих сил равна нулю: $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$. Но доска будет поворачиваться. В покое находится только центр масс, если его начальная скорость (скорость до приложения сил) была равна нулю.

Точно так же две одинаковые по модулю и противоположные по направлению силы поворачивают руль велосипеда или автомобиля (рис. 8.2) вокруг оси вращения.

Нетрудно понять, в чём здесь дело. Любое тело находится в равновесии, когда сумма всех сил, действующих на каждый его элемент, равна нулю. Но если сумма внешних сил равна нулю, то сумма всех сил, приложенных к каждому элементу тела, может быть и не равной нулю. В этом случае тело не будет находиться в равновесии. В рассмотренных примерах доска и руль потому и не находятся в равновесии, что сумма всех сил, действующих на отдельные элементы этих тел, не равна нулю. Тела вращаются.

Выясним, какое ещё условие, кроме равенства нулю суммы внешних сил, должно выполняться, чтобы тело не вращалось и находилось в равновесии. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твёрдого тела (см. § 7.6):

$$J\beta = M. \qquad (8.2.3)$$

Напомним, что в формуле (8.2.3) момент

$$M = \sum_i M_i$$

представляет собой сумму моментов приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения, а J — момент инерции тела относительно той же оси.

Если $\sum_i M_i = 0$, то и $\beta = 0$, т. е. тело не имеет углового ускорения, и, значит, угловая скорость тела

$$\omega = \text{const}.$$

Если в начальный момент угловая скорость равнялась нулю, то и в дальнейшем тело не будет совершать вращательное движение.

Следовательно, равенство

$$\sum_i M_i = 0 \qquad (8.2.4)$$

(при $\omega = 0$) является вторым условием, необходимым для равновесия твёрдого тела.

При равновесии твёрдого тела сумма моментов всех внешних сил, действующих на него относительно любой оси[1], равна нулю.



В общем случае произвольного числа внешних сил условия равновесия твёрдого тела запишутся в виде:

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0, \\ M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = 0. \end{array}} \qquad (8.2.5)$$

Эти условия необходимы и достаточны для равновесия любого твёрдого тела. Если они выполняются, то векторная сумма сил (внешних и внутренних), действующих на каждый элемент тела, равна нулю.

Равновесие деформируемых тел

Если тело не абсолютно твёрдое, то под действием приложенных к нему внешних сил оно может не находиться в равновесии, хотя сумма внешних сил и сумма их моментов относительно любой оси равна нулю. Это происходит потому, что под действием внешних сил тело может деформироваться и в процессе деформации сумма всех сил, действующих на каждый его элемент, в этом случае не будет равна нулю.

---

[1] Мы рассматривали моменты сил относительно реальной оси вращения тела. Но можно доказать, что при равновесии тела сумма моментов сил равна нулю относительно любой оси (геометрической линии), в частности относительно трёх осей координат или относительно оси, проходящей через центр масс.

Приложим, например, к концам резинового шнура две силы, равные по модулю и направленные вдоль шнура в противоположные стороны. Под действием этих сил шнур не будет находиться в равновесии (шнур растягивается), хотя сумма внешних сил равна нулю и равна нулю сумма их моментов относительно оси, проходящей через любую точку шнура.

При деформации тел, кроме того, происходит изменение плеч сил и, следовательно, изменение моментов сил при заданных силах. Отметим ещё, что только у твёрдых тел можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия силы в любую другую точку тела. Это не меняет момента силы и внутреннего состояния тела.

В реальных телах переносить точку приложений силы вдоль линии её действия можно лишь тогда, когда деформации, которые вызывает эта сила, малы и ими можно пренебречь. В этом случае изменение внутреннего состояния тела при переносе точки приложения силы несущественно. Если же деформациями пренебречь нельзя, то такой перенос недопустим. Так, например, если вдоль резинового бруска к двум его концам приложить две равные по модулю и прямо противоположные по направлению силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 8.3, *а*), то брусок будет растянут. При переносе точек приложения этих сил вдоль линии действия в противоположные концы бруска (рис. 8.3, *б*) те же силы будут сжимать брусок и его внутреннее состояние окажется иным.

Для расчёта равновесия деформируемых тел нужно знать их упругие свойства, т. е. зависимость деформаций от действующих сил. Эту сложную задачу мы решать не будем. Простые случаи поведения деформируемых тел будут рассмотрены в следующей главе.

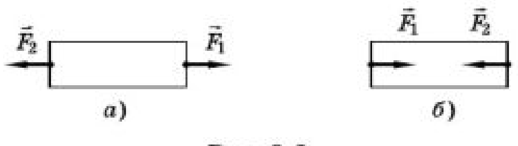


Рис. 8.3

Для равновесия твёрдого тела должны равняться нулю сумма внешних сил и сумма моментов сил, действующих на тело. Должны быть также равны нулю начальная скорость центра масс и угловая скорость вращения тела.

§ 8.3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Настала пора более подробно остановиться на понятии центра тяжести. Предварительно представление об этой замечательной точке было дано в главе 3.

Центр тяжести

Момент силы зависит от её плеча, а значит, и от точки приложения силы. Когда на тело действуют силы со стороны тросов, пружин и т. п., то положение точек приложения сил очевидно. Но что можно сказать о точке приложения силы тяжести?

Особенностью силы тяжести является то, что она действует на тело не в одной какой-то точке, а по всему объёму тела. Силы тяжести, действующие на отдельные элементы тела, направлены к центру Земли и, следовательно, не будут параллельными. Однако если размеры тела значительно меньше радиуса Земли, можно считать эти силы параллельными.

Точка, через которую проходит равнодействующая всех параллельных сил тяжести, действующих на отдельные элементы тела (при любом положении тела в пространстве), **называется центром тяжести.**

Определение центра тяжести тела простой формы

Найдём вначале положение центра тяжести для наиболее простого случая, когда тело состоит из двух шаров различных масс, соединённых стержнем, массой которого можно пренебречь по сравнению с массами шаров. Кроме того, длину стержня будем считать значительно превышающей радиусы шаров. Тогда шары можно считать материальными точками (рис. 8.4, *а*). Итак, на материальные точки A и B, соединённые невесомым стержнем, действуют силы тяжести $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельные друг другу. Геометрическая сумма этих сил представляет собой результирующую силу тяжести:

$$\vec{F}_{\text{т}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{8.3.1}$$

Она направлена к центру Земли, так же как и силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, а её модуль равен сумме модулей слагаемых сил.

Положение центра тяжести, т. е. точки приложения результирующей силы, можно определить, используя тот про-

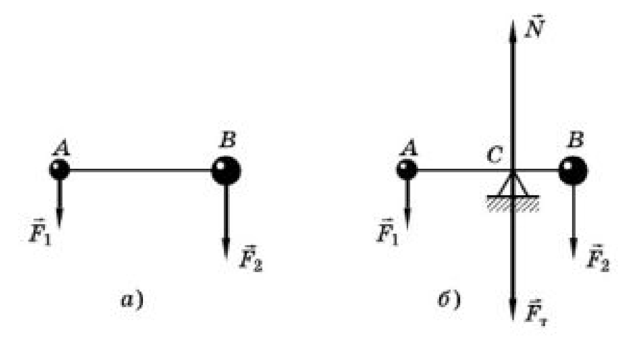


Рис. 8.4

стой факт, что тело, закреплённое на оси, проходящей через центр тяжести C, должно находиться в равновесии. Ведь относительно этой оси моменты сил тяжести $\vec{F}_т$ и силы реакции опоры $\vec{N}$ равны нулю, так как равны нулю плечи этих сил (рис. 8.4, *б*).

В то же время, согласно условию равновесия (8.2.5), можно записать: $F_1d_1 - F_2d_2 = 0$, где $d_1 = AC$ и $d_2 = CB$ — плечи сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Отсюда

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}. \tag{8.3.2}$$

Равенство (8.3.2) определяет положение центра тяжести рассматриваемого тела. Точка приложения равнодействующей параллельных сил тяжести делит расстояние между точками приложения этих сил на отрезки, обратно пропорциональные модулям сил.

Нахождение центров тяжести тел является важной технической задачей, так как от положения центров тяжести зависит устойчивость мостов, плотин, зданий, телевизионных вышек, автомашин, ракет на старте и т. п. Нужно поэтому познакомиться с методами нахождения центров тяжести тел различной формы.

Нахождение центра тяжести тел

В технике и в повседневной жизни мы встречаемся с телами самой различной формы. Часто они состоят из стержней и дисков (колесо на оси, спортивная штанга и т. д.). Многие плоские фигуры состоят из прямоугольных и треугольных пластин. При определении положения центра тяжести по-

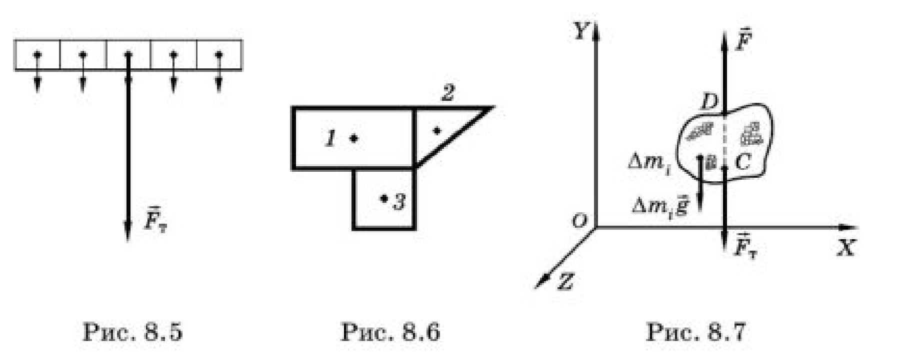


Рис. 8.5 Рис. 8.6 Рис. 8.7

добных тел проще всего вначале определить положение центров тяжести отдельных его частей простой формы. У тел простой формы можно сразу указать положение центра тяжести, руководствуясь соображениями симметрии.

Так, центр тяжести однородного стержня, очевидно, располагается в середине стержня (рис. 8.5). У всех однородных фигур, имеющих центр симметрии, центр тяжести совпадает с этим центром: у круга — с его геометрическим центром, у параллелограмма — с точкой пересечения диагоналей и т. д. При этом центр тяжести может находиться и вне тела (например, у кольца или пустотелой сферы).

Определив положения центров тяжести составных частей тела сложной формы, можно найти, где расположен центр тяжести всего тела. Для этого надо заменить тело системой материальных точек, каждая из которых помещается в центре тяжести соответствующей части тела и имеет массу этой части (рис. 8.6).

Координаты центра тяжести твёрдого тела

Рассмотрим теперь общий метод определения координат центра тяжести произвольного твёрдого тела. Для решения задачи предположим, что равнодействующая сил тяжести, приложенных к отдельным элементам тела, и точка её приложения уже найдены.

Пусть сила тяжести равна $\vec{F}_т$ и приложена в точке C (рис. 8.7) с координатами x, y, z. Приложим теперь к телу в другой точке внешнюю силу $\vec{F}$, такую, чтобы тело находилось в равновесии. Это можно сделать, например, подвесив тело в точке D на нити или закрепив его в этой точке другим способом. Так как в этом случае можно считать, что на тело

действуют только две силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_т$, то, согласно условию равновесия (8.2.1),

$$\vec{F} + \vec{F}_т = 0. \qquad (8.3.3)$$

Отсюда следует, что сила $\vec{F}$ должна быть равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}_т$.

Разобьём теперь мысленно тело на элементы (материальные точки) и запишем условие равновесия, уже не заменяя равнодействующей совокупность элементарных сил тяжести:

$$\vec{F} + \sum_i \Delta\vec{F}_{тi} = 0 \qquad (8.3.4)$$

(здесь $\Delta\vec{F}_{тi} = \Delta m_i \vec{g}$ — сила тяжести, действующая на произвольный малый элемент массой Δm_i).

Из (8.3.3) и (8.3.4) следует, что

$$\vec{F}_т = \sum_i \Delta\vec{F}_{тi} = \sum_i \Delta m_i \vec{g} = m\vec{g}$$

$\left(\text{здесь } m = \sum_i \Delta m_i \text{ — масса тела}\right)$.

Таким образом, равнодействующая направлена вниз и равна сумме всех элементарных сил тяжести.

Вспомним теперь, что рассматриваемое тело находится в покое. Это значит, что совокупное действие силы $\vec{F}$ и силы $\vec{F}_т$, заменяющей многочисленные элементарные силы тяжести, не вызывает вращения тела. Следовательно, выполняется условие равновесия (8.2.4) для моментов всех сил относительно любой неподвижной оси. В качестве таковой удобно взять одну из координатных осей, например ось OZ (рис. 8.8). Момент M равнодействующей $\vec{F}_т$ и момент M' силы $\vec{F}$ должны в сумме давать при равновесии нуль:

$$M' + M = 0. \qquad (8.3.5)$$

Очевидно, что условие (8.3.5) сводится к требованию, чтобы равные по модулю и противоположные по направлению силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_т$ имели бы одну и ту же линию действия.

В то же время если не заменять элементарные силы тяжести равнодействующей, то условие равновесия (8.3.5) для моментов должно выполняться в виде

$$M' + \sum_i \Delta M_i = 0. \qquad (8.3.6)$$